

La Geometria Elementare
istituita sulle nozioni di 'punto' e 'sfera'.

Memoria del prof. MARIO PIERI

(presentata dal Socio G. CASTELNUOVO, e approvata dal Socio G. SEGRE).

PREFAZIONE

« Die meisten Lehrbücher der Geometrie gehen zu
• bald zum Besondern, nämlich zur Congruenz und Ähn-
• lichkeit der Dreiecke über; daher sie auch manche
• Begriffe nicht in der gehörigen Allgemeinheit auf-
• stellen... Ähnliche Figuren sind nichts anderes als
• homologe Stücke von ähnlichen räumlichen Systemen.
• Der Betrachtung von centrischen Figuren sollte die
• des centrischen Systems, und der Betrachtung von
• symmetrischen Figuren die des symmetrischen Sys-
• tems vorangestellt werden. Uebrigens ist in vielen
• Lehrbüchern, obgleich Natur und Kunst in allen ihren
• Gebilden nach Symmetrie streben, dieser Begriff gar
• nicht entwickelt. » G. C. von STAUDT, *Geom. d. Lage*,
Vorwort (Nürnberg, 1847).

• Tutto sommato, parrebbe che gli elementi costrut-
• tivi primordiali, che più spiccatamente intervengono
• a formare lo spazio tattile-muscolare, non siano le
• nozioni della retta e del piano, ma sì della 'distanza',
• e quindi dei 'cerchi' e delle 'sfere'. » F. ENRIQUES,
Problemi della scienza, pag. 322 (Bologna, 1906).

In un lavoro del 1899 — dopo avere affermato « la possibilità di comporre tutta
• quanta la Geometria elementare con queste due sole materie prime: il 'punto'
• e una certa relazione fra tre punti a, b, c , che si può interpretar con le frasi
• « c dista da a quante b », « c appartiene alla sfera di b , centro a », « le
• coppie (a, b) ed (a, c) sono congrue fra loro », e rappresentar, se ci piace,
• col simbolo ' $c \sim b, a$ ' — soggiungeva: « l'eccessiva complicazione che involge
• sinora la più gran parte d'un tal sistema (dato le molte esigenze d'indole logico-
• deduttiva, a cui si vuol sottostare) ne lascia tuttavia il desiderio, se non il bisogno,
• di nuovi studi e di ricerche ulteriori (*) ». Frutto di così fatte ricerche il presente

(*) « *Della Geometria Elementare come sistema ipotetico-deduttivo* », nelle *Memorie della Reale
Accademia delle Scienze di Torino*, v. XLIX, (1899), pag. 176.

Saggio che (s'io non m'inganno) raggiunge appunto quel grado di semplicità e di rigore, ch'obbi in mira sin da quel tempo, e che agli occhi miei rappresenta il massimo pregio di questo genere di studi.

Le analogie, che intercedono fra i due lavori, son per altro assai meno di quanto sarebbe supporre l'affinità del soggetto. Là, dove il 'moto' o 'congruenza delle figure', come trasformazione dei punti in punti, si ammetteva e si adoperava anche più del bisogno in qualità d'idea prima, cioè non definita altrimenti che per postulati; qui per l'opposto, tutte quante le operazioni o relazioni geometriche fondamentali (simmetrie, congruenze, similitudini, ecc.) vengono definite nominalmente, anzi genericamente, a spese del 'punto' e dell'equidistanza da un punto': con processo in tutto simile a quello, per cui — movendo dai soli concetti di 'punto proiettivo' e di 'allineamento fra punti proiettivi' — la Geometria Proiettiva Staudiana introduce le collineazioni o le correlazioni (*).

Per es. la definizione di *similitudine* — come trasformazione dei punti, rispetto alla quale è invariante la relazione 'e dista da a quanto b' (§ 4) — fa perfetto riscontro a quella di *collineazione* (*). Novità che non hanno precedenti notevoli, fuorchè nel sistema di G. VON KRIES (*) — dove son molti di più gli oggetti non definiti, o di tutt'altra specie è la critica e il metodo — e nei *Fundamenti della metrica proiettiva* di R. LUKAS (*). Né qui si arrestano gli obblighi nostri verso i più fecondi principi o gli strumenti più validi della Geometria moderna. Il concetto di rappresentazione dei punti in punti, o di trasformazione estesa a tutto lo spazio, acquista il medesimo ufficio fondamentale, che ha nella Geometria Proiettiva o nell'Analisi (§§ 2, 4, 6); o la misura delle lunghezze o degli angoli è resa indipendente dall'esistenza di unità mobili nello spazio (§ 8): ecc. — Inoltre l'analisi dei dati e delle premesse che reggono la Geometria Elementare si spinge molto più innanzi che nel citato lavoro del 1899; e scuopre, si può dir, tutto lo fondamento dell'edifizio Euclideo (*).

Il nuovo Saggio, che or si espone al giudizio del pubblico, palesa intenti speculativi e critici: in quanto mira ad escluder col fatto qualunque dubbio possibile sulle attitudini della Geometria Elementare a subir le leggi più rigorose del metodo;

(*) Vedi per es. i miei *Principi di Geometria di Posizione composti in sistema logico-deduttivo*, nella Memoria della R. Accademia delle Scienze di Torino, v. XLVIII, (1898).

(*) G. C. v. STAUDT, *Die Geometrie der Lage*, § 10 (Nürnberg 1847).

(*) *Fundamenti di Geometria a più dimensioni* ecc. (Padova, 1891); ed *Elementi di Geometria*, (Verona, 1897).

(*) Memoria della R. Accademia delle Scienze di Torino, v. LIV, (1904).

(*) Non lungi dall'argomento di queste ricerche vengon le Note « Un nuovo sistema di definizioni per la Geometria euclidea » di A. PADOA (Dixième Congrès International des Mathématiciens, l'aria, 1900) o « La Geometria fondata sulle idee di punto e distanza » di G. PEANO (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, XXXVIII, 1902): trattando sommariamente del come si definiscano gli enti geometrici con le sole idee primitive di 'punto' o 'congruenza fra coppie di punti', per altro senza toccar la questione dei postulati o preposizioni primitive. Poco attinenza ha col nostro soggetto la elegante Memoria di O. VEULEN 'A system of axioms for geometry' (Trans. of the Americ. Society, v. V, 1904) che — sulla traccia di M. PASCAL e G. PEANO — istituisce o conferma i principi della Geometria Proiettiva, sopra le sole nozioni di 'punto' e 'segmento' (Anordnung) mediante un sistema completo o categorico di postulati indipendenti fra loro.

si sciogliere da ogni vincolo di servitù con l'intuizione di spazio; ad essere istituita, in tutta la sua integrità, come sistema ipotetico-deduttivo; e a comparir, se ci piace, sotto la forma di « studio d' un certo ordine di relazioni logiche » (1).

Non ha vesti o pretese didattiche; ma neppur vorrebbe apparire così remota dalla Scuola, nè di sì ardua o preziosa fattura, da non potersene avvantaggiare anche i giovani poco più che iniziati allo studio delle Matematiche (2). Certo è che l'insegnamento della Geometria Elementare, quale oggi s'imparte nelle nostre scuole medie, è troppo impari al bisogno di chi più tardi abbia a fare di quelle scienze il suo studio principale: onde più volte da valorosi e provetti docenti mi avvenne di udire espresso il desiderio, che i loro giovani scolari trovasser poi modo di approfondirne o rifarne il trattato, con mezzi più idonei e più rigorosi, nelle scuole universitarie.

Da questi cenni, e dall'indice che viene appresso, il Lettor si può fare un'idea circa l'indole e il contenuto del presente Saggio. Le proposizioni primitive sono in numero di ventiquattro, e di ognuna si troverà l'enunciato anche in termini di « punto » e « sfera ». L'Appendice è soltanto per chi non s'intende di certe idee famigliari ai matematici, come di postulato, definizione, deduzione, rappresentazione, e simili: che tutto son di vitale interesse per noi.

Elenco delle abbreviazioni.

Se A, B, C sono punti, con $'AB'$, $'ABC'$ si rappresenta la retta (illimitata) congiungente A e B e il piano congiungente gli A, B e C ; con $'B'$ la sfera che ha il centro in A e passa per B ; con $'Sfr(A, B)'$ quella sfera, dove i punti A e B sono poli, (o diametralmente opposti). I simboli $'A/B'$ ed $'A \setminus B'$ denotano l'uno il punto medio di A o B , l'altro il simmetrico di A rispetto a B . Con $'[AB]'$ si suole indicare il segmento terminato in A e B (gli estremi inclusi), con $'[AB'$ la semiretta, o raggio, che ha l'origine in A e contiene B . A designa l'angolo piano convesso o concavo, che ha per lati le semirette $[AB], [AC]$, si scrive rispettivamente \hat{A}, \hat{BC} o \hat{A}, \hat{BC}' ; mentre $'[ABC]'$ denota il triangolo che ha per lati i segmenti $[AB], [AC], [BC]$. Il segno \perp fra due rette o piani, ovver fra una retta ed un piano, afferma l'ortogonalità di queste figure tra loro. Similmente \simeq è un indice di congruenza (o sovrapposibilità); « $a \simeq b$ » vuol dire « segmento a nel senso A — B ». Ma tutti questi caratteri peculiari alla Geometria si definiranno ad uno ad uno nel testo.

$'P'$ e $'Prp'$ (Proposizione), $'Df'$ o $'Dfn'$ (Definizione), $'Pst'$ (Postulato), $'Tr'$ (Teorema), $'Ip'$ o $'Ipt'$ (Ipotesi), $'Te'$ (Tesi). La scrittura $'P1', 'P2', \dots$ richiama le proposizioni 1^a, 2^a, ..., e, se non è seguita da qualche citazione di §, si riferisce al § corrente. Il simbolo $\left(\begin{smallmatrix} P, C, A \\ A, B, C \end{smallmatrix} \right)$ $P7 \S 2$ richiama la $P7$ del § 2, nella quale i nomi degli enti A, B, C siano rispettivamente mutati in D, C, A .

(1) « Geometry is in structure a system of theorems deduced in pure logical way from certain improvable assumptions precreated by auto-active animal and human mind » G. B. HALEYD, in *Science* N. S., vol. XIX, n. 489 (1905). — Vedi anche una mia Nota « *Sur la Géométrie envisagée comme un système purment logique* », Congrès Intern. de Philosophie, Paris, 1900.

(2) It is an error to believe that rigor in the proof is the enemy of simplicity. On the contrary, we find it confirmed by numerous examples, that the rigorous method is at the same time the simpler and the more easily comprehended. The very effort for rigor force us to find out simpler methods of proof. » G. B. HALEYD, ibidem.

Si adopera il segno \sim al posto di $=$ eguale per definizione.... Così $r \sim AB$ (dove A e B siano punti diversi) significa r è (sotto altro nome) la congiungente A con B .

* ϵ Precede sempre un nome comune, vale a dire il simbolo d'una classe, ϵ segue il nome, ed i nomi, d'uno o più individui di questa. Si può intendere e leggere per ϵ $an...$, ϵ sono def..., ϵ appartiene (o appartengono) a....

\subset Posto la menza a due classi vuol dire che la prima (a sinistra) è contenuta nell'altra, ossia che ciascun elemento dell'una spetta, come individuo, anche all'altra. Fra due prop. denota che la seconda è conseguenza della prima, e sta per ϵ si deduce.

\equiv Segno di eguaglianza logica. Fra due classi denota che ciascuna è contenuta dall'altra. Fra due punti è per dire, s'essi coincidono fra loro. Fra due proposizioni denota, che ciascuna è conseguenza dell'altra.

\sim Segno di negazione, sta invece di \neq . Per es. con la scrittura $C \sim AB$ si esprime che C non appartiene ad AB . Così $\sim =$ vorrà dire \neq non è uguale a....

\wedge Segno di congiunzione logica, e copula. Fra due nomi comuni è per indicare il prodotto logico delle due classi, ossia l'aggregato degli individui comuni alle medesime. Fra due proposizioni vuol dire, che si afferma l'una e l'altra ad un tempo. Si può leggere \wedge , ϵ insieme con.

\cup Disgiunzione logica. Fra due classi denota la loro somma logica, cioè la minima classe capace di contenere l'una e l'altra. Fra due giudizi è per affermar l'uno o l'altro, indistintamente. Si legge \cup , ϵ ovvero.

Questi pochi segni di Logica si useranno con parsimonia. Le dimostrazioni verranno chiuse generalmente in parentesi quadre; ma si tratterà per lo più d'uno schema di deduzione atto a guidar dall'Ipotesi fino alla Tesi.

Indice delle Materie.

§ 1°. Il punto e la sfera. Proprietà cardinali dell'equidistanza da un punto. Prime proposizioni circa la retta ed il piano. Centro d'una coppia di punti. S'introducono le simmetrie rispetto ad un punto e rispetto ad un asse (equivalenze e semigiri).

§ 2°. Ortogonalità fra due rette, o fra una retta ed un piano, ovvero fra due piani. S'introduce la rotazione intorno ad un asse. Simmetria rispetto ad un piano, o specchiamento. Proprietà diverse in ordine a rette, piani e sfere.

§ 3°. Punti interni ed esterni a una sfera. Segmenti, raggi, semipiani angoli, triangoli, ecc.

§ 4°. Teoremi sulle rotazioni. I postulati d'Euclide e d'Archimede. Similitudine ed isomeria. Congruenza dei segmenti e degli angoli.

§ 5°. Relazione di maggiore e minore fra due segmenti, ovvero fra due angoli piani. Congruenza dei triangoli. Somma di due segmenti e di due angoli piani convessi. Altre proprietà di triangoli, cerchi, sfere, ecc.

§ 6°. Parallelismo di rette e piani. Ometetia e traslazione. Proprietà e costruzione delle similitudini. Antiversione rispetto a una sfera. Intersezione di due sfere.

§ 7°. Prodotti di isomerie. Congruenze e anticongruenze. Antirotazioni e antitrazioni. Ellicmosioni. Classificazione delle isomerie.

§ 8°. Sensi e versi d'una retta e d'un cerchio. Ascisso. Rappresentazione della retta coi numero reali. Distanza di due punti. Continuità della retta.

§ 1.

Il punto e la sfera. Proprietà cardinali dell'equidistanza da un punto. Prime proposizioni circa la retta ed il piano. Centro d'una coppia di punti. S'introducon le simmetrie rispetto ad un punto e rispetto ad un asse (equinversione e semigiro).

P 1 — Df. (1) « *Figura* è il medesimo che gruppo o collezione di punti. Il nome di 'figura' spetta a qualsivoglia aggregato, o classe di punti, senza eccezione di sorta. — Se φ è una figura, per significare che A è un punto di φ si suole anche dire che A appartiene a φ , o giace in φ , o che φ passa per A , ecc.; o si scrive ' $A \in \varphi$ '. »

P 2 — Df. « Dire che una figura φ è contenuta, o giace, in un'altra ψ — o che ψ passa per φ — sarà quanto affermare che ogni punto di φ appartiene anche a ψ : la qual cosa si esprime ancora scrivendo ' $\varphi \subset \psi$ '. Due figure coincidono, ovvero « si confondono in una », qualunque volta ciascuna di esse è contenuta dall'altra ». — Osservate che ogni figura è contenuta in sè stessa (proprietà riflessiva del contenere); e che se $\varphi \subset \psi$ e $\psi \subset \chi$ — essendo anche χ una figura — bisognerà che $\varphi \subset \chi$ (proprietà transitiva). Questi medesimi caratteri palesa la relazione di coincidenza tra due figure: la quale inoltre è reversiva o simmetrica. — Di due o più figure, le quali abbian qualche punto in comune, o contengano tutte una medesima figura, bene spesso diremo che s'incontrano o s'intersecano in quei punti, o in questa figura. La classe dei punti, ognuno dei quali appartiene a due o più figure date $\varphi, \psi, \chi, \dots$ ad un tempo (ove esistano punti siffatti) è una figura, che diceasi la *intersezione* (o prodotto logico) di quelle, e può essere significata da ' $\varphi \cap \psi \cap \chi \cap \dots$ '; altra figura è la somma logica delle $\varphi, \psi, \chi, \dots$ — espressa in ' $\varphi \cup \psi \cup \chi \cup \dots$ ' — cioè la classe dei punti, ognuno dei quali appartiene a φ , ovvero a ψ , ovvero a χ, \dots indistintamente.

P 3 — Df. « Due punti coincidono, o non si distinguono fra loro, se uno di essi appartiene a qualunque figura, che passi per l'altro: laddove, se esiste una qualche figura cui l'uno appartenga e non l'altro, i due punti saranno distinti, o diversi fra loro ». — Osservate che anche una tal relazione (di coincidenza fra punti) è riflessiva, transitiva e simmetrica. — Allorchè due o più punti coincidono, si suol parlarne talvolta come d'un solo individuo; ma è bene spesso opportuno di concepirli e trattarli come figura (costituita in più punti coincidenti). — Per solito la coincidenza fra punti over fra figure si nota col segno ' $=$ ' (è uguale a).

(1) Vedi la nota I in Appendice.

P 4 — *Df.* « Se A, B, C sono punti, il giudizio 'C appartiene alla sfera di B, centro A', è per significare che C dista da A quanto B, o che B e C sono equidistanti da A. In altri termini, si chiama 'sfera di B, centro A' la figura di tutti quei punti, ognuno dei quali dista da A quanto B. Invece di 'sfera di B, centro A' si dice anche talvolta 'sfera di B intorno ad A, o circa A', o si scrive 'B_A'; o per esprimere che C dista da A quanto B si dirà spesso che i punti B e C sono 'equidistanti da A', o che A 'equidista dai punti B e C'. — Con la frase 'C dista da A quanto B' si afferma, che una certa relazione intercede fra i punti A, B, C. Questa relazione non si definisce, come non è definito il punto: ma per mezzo di queste due cose — e insomma mercè del 'punto' e della 'sfera d'un punto intorno ad un altro' — si definiranno tutti quanti gli oggetti che occorrono in Geometria Elementare (1).

POSTULATI I-II (2).

P 5 — *Esiste almeno un punto; e, dato un punto a piacere, esiste ancor qualche punto diverso da quello.*

POSTULATI III-IV.

P 6 — *Qualunque siano i punti A e B, sempre il punto B appartiene alla sfera di B, centro A. E se un punto C appartiene alla sfera di B, centro A, il punto B alla sua volta dovrà giacer nella sfera di C, centro A.* — Grazie all'ultima defn. (P 4), questi principi III-IV, dicono soltanto: « Posto che A e B siano punti, sempre B dista da A quanto B; o se un punto C dista da A quanto B, converrà che B alla sua volta disti da A quanto C ». (Proprietà riflessiva o conversiva dell'equidistanza da un punto).

POSTULATO V.

P 7 — *Per che A e B siano punti, se avviene che un terzo punto C appartenga alla sfera di B, centro A, e un quarto punto D alla sfera di C, centro A, for'è che D appartenga alla sfera di B circa A.* — O, in altri termini (grazie a P 4): « Se A, B, C, D sono punti e 'C dista da A quanto B' e 'D quanto C; converrà che anche il punto D disti da A quanto B ». (Proprietà transitiva dell'equidistanza).

POSTULATO VI.

P 8 — *Intanto che i punti A e B son diversi fra loro, non potrà darsi che A spetti alla sfera di B, centro A.* — Cioè « Se i punti B ed A non coincidono (P 3), per certo A non dista da A quanto B » (P 4).

(1) Vedi la nota II in Appendice.

(2) Ved. la nota III in Appendice.

P 9 — Tr. «Se coincidono i punti A e B, nessun punto diverso da A appartiene alla sfera di B, centro A, ma il punto A vi appartiene». [Por certo B appartiene alla sfera B_1 (P 6); dunque anche A (P 3, 4), visto che $A = B$ per Ipt. D'altra parte, se un qualche punto C diverso da A potesse giacere in B_1 , dovrebbe il punto B giacere sulla sfera C_1 (grazie alla stessa P 3); per la qual cosa anche A spetterebbe a C_1 , contro P 8]. — Di qui nasce, che la sfera d'un punto A qualsivoglia intorno a sè stesso (ossia la figura A_1) è tutta condensata in A: visto che i punti A ed A si confondono, qual che sia A (P 3). Cosicchè (P 4) nessun punto diverso da A dista da A quanto A.

P 10 — Tr. «Sempre che A, B, C siano punti; se C appartiene alla sfera di B, centro A, le sfere di B e di C intorno ad A si confondono in una sola e medesima figura». EUCL. lib. 3 prp. V (1). [Basterà dimostrare (giusta P 2) che ciascun punto della figura B_1 appartiene anche all'altra figura C_1 ; e che, viceversa, ogni punto di questa è anche punto di quella. Ora, sia p. es. M un punto arbitrario nella sfera di B, centro A. Dalla P 6 si deduce, che il punto B appartiene alla sfera M_1 ; ma per Ipt. abbiamo, che C appartiene a B_1 ; dunque, in virtù di P 7 (dove si legge M, B, C in luogo di B, C, D), bisognerà che C appartenga a M_1 ; e di qui si deduce, attraverso la stessa P 6, che M appartiene alla sfera C_1 . Pertanto B_1 sarà contenuta in C_1 . Viceversa, detto N un punto arbitrario nella sfera di C intorno ad A; dall'Ipt. che C appartenga a B_1 , ed N a C_1 , si deduce, sempre in virtù di P 7, che N appartiene a B_1 ; onde C_1 sarà contenuta in B_1 . E però si conclude che $B_1 = C_1$; c. v. d.].

P 11 — Df. «Posto che A, B siano punti e A diverso da B, si chiamerà «*coniungente A con B*» o semplicemente «AB» — la classe dei punti, per ognuno dei quali — sia per es. X — le sfere di X intorno ad A e B non hanno punti comuni, da X in fuori». EUCL., lib. 3^a, prp. XI, XII. È quanto dire (secondo P 4) il «luogo d'ogni punto X, per cui non esista alcun punto diverso da X, e che disti da A e da B quanto X — tale insomma che un punto, il quale disti da A e da B quanto X, debba coincidere con X». (2) — Osservate che il punto X onde si parla è certamente comune ad ambo le sfere X_1 e X_2 (P 6). Due sfere obbedienti alla prescrizione anzidetta — cioè d'incontrarsi in un punto solo — si diranno «*tangenti fra loro*» in quel punto (punto «di contatto»). E l'esistenza di qualche punto X come sopra emerge per ora dalla seguente:

P 12 — Tr. «Sotto la stessa ipotesi, per certo i punti A e B giaceranno sulla congiungente A con B; e le due figure «AB» e «BA» coincideranno». [Le sfere A_1 e A_2 non s'incontrano fuori di A, posto che nessun punto diverso da A appartiene alla sfera A_1 (P 9); dunque $A = AB$ (P 11) e nel modo stesso anche B =

(1) Nelle citazioni di EUCLIDE, mi richiamo all'edizione di K. BETTI e F. BRIOGHI per le scuole italiane, 15^a rist. (Firenze, Le Monnier, 1883).

(2) Questa dffn., e l'altra consimile in ordine al piano che unisce tre punti dati (vedi P 27) spettano a G. W. LEIBNIZ («Hæc plani definitio mihi est, ut sit locus omnium punctorum cui ad tria puncta in eandem rectam non cadentia situs unicorum» *Characteristic Geometrica*, Math. Schr. t. V, p. 189, a. 1679). Forza poi ritrovate da A. CAUCHY (*Sept leçons de physique générale*, Paris, 1828, pagg. 44-45) e quindi accolte da vari Autori (MANSION, PADOA, PEANO, ...).

AB. — Il resto viene da ciò, che la dfnz. preced. è simmetrica rispetto ad A e B; cioè si converte in sè stessa ogni volta che questi punti si barattan fra loro].
— Che poi la congiungente AB contenga altri punti in più di A e B, è cosa da stabilire più tardi: ved. i par.¹ XII e XIII.

POSTULATO VII.

P 13 — *Ogni qualvolta A, B, C siano punti, se le due sfere C_A e C_B non s'incontrano fuor di C, similmente le sfere di B intorno ad A e C non potranno aver punti a comune diversi da B.* — Vale a dire (P 4) che: « Se, tranne il punto C, nessun altro punto disti da ognuno dei punti A e B quanto C, nemmeno potrà esistere un punto diverso da B che disti da A e da C quanto B (premesso che i punti A e C non coincidano) ».

P 14 — *Tr.* « Dati i punti A e B come sopra, tanto vale affermare che un punto C diverso da A appartenga alla congiungente A con B, quanto dire che il punto B appartiene alla congiungente A con C ». [Invero, di questi due fatti il secondo è conseguenza del primo, grazie alla prps. prec.¹² e alla dfnz. P 11. Ma la stessa P 13 (purehè vi si legga C e B ov'è scritto B e C) ne assicura, che C appartiene ad AB, se B ad AC: onde il primo di que' due fatti è a sua volta una conseguenza dell'altro].

POSTULATO VIII.

P 15 — *Qualunque siano i punti A e B non coincidenti fra loro, esisterà senza fallo anche un punto C, per cui le sfere C_A e C_B s'incontrino fuor di C.* — Una volta ammessa la dfnz. P 11, questo giudizio non differisce dall'altro: « Per ogni coppia di punti distinti si può sempre affermar l'esistenza di almeno un punto « straniero alla lor congiungente (ossia tale, che qualche punto diverso da quello disti « da A e da B come quello) ».

POSTULATO IX.

P 16 — *Se, essendo A, B, C punti dati, C sia l'unico punto comune alle sfere C_A e C_B ed M un punto arbitrario; allora ogni punto comune alle sfere M_A ed M_B dovrà appartenere alla sfera M_C .* — O, in altri termini (P 4): « Premesso che A, B, C, M sono punti; se nessun punto diverso da C disti da A e da B quanto C, allora ogni punto, che disti da A e da B quanto M, dista pure da C quanto M ». La T₂ afferma in sostanza (P 2), che « l'intersezione delle due sfere di M intorno ad A e B giacerà sulla sfera M_C (cioè che $M_A \cap M_B \subset M_C$) ».

P 17 — *Tr.* « Posto che A, B siano punti diversi l'uno dall'altro, se un punto C appartiene alla congiungente A con B, ma è diverso da A, le due congiungenti « A con B ed A con C si confonderanno in una sola ». [Proveremo anzi tutto che un punto, il quale appartenga alla congiungente A con C, deve eziandio appartenere alla congiungente A con B. Sia X un tal punto. Se le sfere X_A e X_B s'incontrassero

in qualche altro punto diverso da X, per quello dovrebbe passare anche X_c (grazie a P 16): di modo che non sarebbe più vero il supposto, che le X_a e X_c non s'incontrino fuori di X (P 11). Dunque X appartiene ad AB, onde $AC \supset AB$. Resta il vedere che, viceversa, ogni punto di AB dovrà stare in AC, vale a dire che $AB \supset AC$. Per certo il punto B appartiene alla congiungente A con C (P 14). Ma, se dall'esser C un punto di AB, per altro diverso da A, si deduce (come abbiamo visto or ora) che AC sia contenuta in AB; nel modo stesso dal fatto, che B è un punto di AC diverso da A, dovrà risultare che AB sia contenuta in AC].

P 18 — 7r. « Qualunque volta i punti A e B non coincidano, e C sia un punto della congiungente A con B, purchè diverso da B, le due congiungenti AB e BC coincideranno ». [L'ipta. vuol che C appartenga a BA (P 12): e di qui si deduce, attraverso $\left(\begin{smallmatrix} B, A \\ A, B \end{smallmatrix}\right)$ P 17, che $BA = BC$; e p. cons. che $AB = BC$].

P 19 — 7r. « Sempre che A, B siano punti l'uno diverso dall'altro, se avvien che due punti C e D, pur essi non coincidenti, appartengano alla congiungente A con B, le due figure AB e CD coincideranno ». [Dall'ipta. emerge, che il punto C non coincide ad un tempo con A e con B (P 8). Ora, ove C sia diverso da A, ne avverrà che le congiungenti A con B ed A con C si confondono (P 17), e p. e. che il punto D appartiene ad AC: ma di qui si deduce, in virtù di $\left(\begin{smallmatrix} C, D \\ A, C \end{smallmatrix}\right)$ P 18, che le congiungenti A con C e C con D si confondono; onde $AB = CD$. Per egual modo, ove C sia diverso da B, la P 18 fa essere uguali le due figure AB e BC; onde il punto D appartiene a BC: e la stessa $\left(\begin{smallmatrix} B, C \\ A, B \end{smallmatrix}\right)$ P 18 farà che coincidano le due figure BC e CD, e p. e. le AB e CD come dianzi. Sicchè in ogni caso $AB = CD$].

P 20 — 7r. « Premesso che A, B, C sono punti al tutto diversi fra loro e che C appartiene alla congiungente A con B, l'intersezione delle due sfere d'un punto qualsivoglia M intorno ad A e B coinciderà sia con l'intersezione delle due sfere M_a ed M_c , sia con l'intersezione delle due sfere M_a ed M_b . » [Se il punto M appartiene alla congiungente A con B, tutte e tre quelle intersezioni son contenute in M (P 11): ma supponiamo che non appartenga ad AB. Il principio IX (P 16), presenti le defaz. P 2, 4, ne assicura che l'intersezione di M_a con M_c dovrà giacere anziando sulla sfera M_c : essa dunque sarà una figura comune tanto alle sfere M_a ed M_c , quanto alle sfere M_c ed M_b . Ora poichè dall'ipta. emerge — in virtù di P 14, 12 e $\left(\begin{smallmatrix} B, A \\ A, B \end{smallmatrix}\right)$ P 14 — che $B \in AC$ ed $A \in BC$; basta appellarsi di nuovo allo stesso principio IX attraverso le sostituzioni $\left(\begin{smallmatrix} C, B \\ A, C \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} A, C \\ C, A \end{smallmatrix}\right)$, per esser certi che ognuna delle figure $M_a \cap M_b$, $M_b \cap M_c$ sarà contenuta dalla figura $M_a \cap M_c$. Dunque $M_a \cap M_b = M_a \cap M_c = M_c \cap M_b$ (P 2): c. v. d.].

P 21 — Df. « Se A, B, C, ... sono punti, le frasi come 'A, B, C, ... sono allineati', o 'son collineari', o 'collimano' vogliono dire: Esistono due punti X ed Y diversi l'uno dall'altro e tali, che gli A, B, C, ... stiano tutti sulla congiungente X con Y — vale a dir tali (P 4. 11), che nessun punto diverso dagli

• A, B, C, \dots disti da X e da Y quanto $A, o B, o C, \dots$. — Non ci arrestiamo a segnar tutte quante le conseguenze nascenti dal carattere di simmetria, che spetta a codesta relazione (di *allineamento*); come altresì dalla mutua dipendenza fra questa e la figura, di cui si parla in P 11. Di tal sorta sono ad es. le tre propos. che seguono.

P 22 — *Tr.* • Di tre punti non collineari, ciascuno è diverso dagli altri due, ed è sempre escluso dalla congiungente degli altri due. [Se almeno due di quei punti son distinti fra loro — e siano A e B — l'Ip^a. esclude senz'altro che il terzo punto C appartenga alla lor congiungente (P 12, 21): per la qual cosa C è diverso da A e da B (P 3, 12); nè potrà darsi che B appartenga ad AC , od A a BC . Ma il supporre che tutti e tre si confondano in uno — p. es. in A — è contrario all'Ip^a; in quanto che allora, detto Y un punto diverso da A (e un tal punto esiste per certo, grazie al principio II) tutti e tre gli A, B, C giacerebber sulla congiungente A con Y (P 3, 12), cioè sarebbero collineari (P 21)].

P 23 — *Tr.* • Perché A, B, C siano punti ed A diverso da B , si equivalgono « sempre i giudizi: 'C appartiene ad AB ' ed ' A, B, C collinano' ».

P 24 — *Tr.* • Se quattro punti A, B, C, D siano tali, che tanto A, B, D , quanto A, C, D e B, C, D collinano, saranno collineari anche i punti A, B, C . — Vale a dire che « Se in quattro punti si contano tre allineamenti, ce ne dev'essere un quarto ». [Se D coincide con A , la *Te.* è affermata esplicitamente in Ip^a, grazie alla defn. P 21 e agli attributi dell'eguaglianza fra punti (P 3). Se all'incontro D non coincide con A , tutti e tre gli A, B, C giaceranno sulla congiungente A con D ; poichè questa, in virtù di P 19, dovrà esser tutt'una con quella che sopporta A, B, D per Ip^a. (P 21), e con quella che sopporta A, C, D . Eec.].

P 25 — *Tr.* • Esistono punti non collineari. [Dai post. I-II (P 5) nasce tosto, ch'esistono almeno due punti l'un l'altro distinti; sian p. es. A o B . Dopo ciò non si può contestar l'esistenza d'un punto C straniero alla congiungente A con B (P 15, 11): ora questi A, B, C son tre punti non collineari (P 23)].

P 26 — *Def.* • Si dà il nome comune di '*retta*' alla congiungente due punti quali che siano, l'uno diverso dall'altro. Orrover: Per '*retta*' s'intende « la classe di tutte le congiungenti possibili, a tenor di P 11 ». Dunque il dire, ad es., che '*r* è una retta', val quanto affermar l'esistenza di certi punti A e B , diversi fra loro e tali, che *r* è (sotto altro nome) la congiungente A con B . — La P 19 non differisce pertanto da quel giudizio, che si enuncia comunemente dicendo: « Per due punti dati, pur che diversi fra loro, non passa più d'una retta ». — orrover « Una retta qualsiasi è individuata mercè di due de' suoi punti »; eec.

P 27 — *Def.* • Ogni qual volta A, B, C siano punti non collineari, si chiamerà « *congiungente* degli A, B, C », ovvero '*piano* ABC ', o semplicemente ' ABC ' « la figura o luogo dei punti, per ognuno dei quali — sia per es. X — le tre sfere di X intorao A, B, C non abbian punti a comune, da X in fuori. » — Il '*piano* ABC ' sarà dunque (P 4) la « classe dei punti, per ognuno dei quali — sia per es. X — non esiste alcun punto diverso da X , che disti da A , da B e da C quanto X »; di guisa che un punto, il quale disti dagli A, B, C quanto X , coinciderà con X . Cfr. P 11.

P 28 — *Tr.* « Sotto la stessa Ipt., le figure ABC, ACB, BAC, BCA, CAB , « CBA si confondono tutte in un solo e medesimo piano, il quale contiene le rette « AB, BC, CA per intero. » [La prima parte è vera per ciò, che nella P 27 il definito è simmetrico rispetto ai punti A, B, C . Ora, se X è un punto di AB (non importa quale) le sfere di X intorno ad A e B non s'incontrano altrove (P 11): per la qual cosa neanche le sfere X_1, X_2 e X_3 potranno tagliarsi in un punto diverso da X . Dunque X appartiene al piano ABC (P 27), e la congiungente A con B giacerà tutta quanta nel piano (P 2). Lo stesso avverrà delle rette BC, CA .]

P 29 — *Tr.* « E le rette che uniscono il punto A coi vari punti della congiungente BC , o B coi punti della CA , o C coi punti di AB giacciono tutte sul « piano ABC . » [Sia per es. D un punto arbitrario di AB . Per certe i punti C e D non coincidono (P 22, ecc.): proveremo che $CD \subset ABC$. Tolgasi un punto X a piacere sopra la retta CD . Poichè D è il solo punto comune alle sfere D_1 e D_2 (P 11), l'intersezione delle due sfere X_1 e X_2 giacerà in ogni modo sopra la sfera X_3 , grazie al principio IX (o anche solo in virtù del III principio, se $X = D$): vale a dire $X_1 \cap X_2 \subset X_3$. Dunque i punti $X_1 \cap X_2$, che giacessero per avventura sopra la sfera X_3 , saranno anche comuni alle sfere X_1 e X_2 : vale a dire $X_1 \cap X_2 \subset X_3 \cap X_1 \cap X_2$. Ma queste non hanno alcun punto comune, da X in fuori: dunque a più forte ragione le X_1, X_2, X_3 non s'incontrano altrove. Dunque X appartiene al piano ABC ; e p. c. la retta CD giace tutta in quel piano: c. v. d.]

Osservate che i termini 'retta', 'piano', ecc. si possono qui facilmente eliminare, per mezzo delle dfuz. precedenti. Ed anche appresso, qualunque termine geometrico che non sia 'punto' o 'sfera' si potrebbe senz'alcun dubbio rimuovere, ponendo in sua vece una conveniente circunlocuzione: se non che il discorso n'uscirebbe soverchiamente prolisso, contorto, anzi il più delle volte inafferrabile; annullandosi tutto il vantaggio che viene dalle dfuz. geometriche. (Vedi la nota I in App.).

POSTULATO X.

P 30 — *A, B, C, D siano punti: se le due sfere D_1 e D_2 , ma non tutte e tre le D_1, D_2, D_3 , s'incontrano altrove che in D ; così anche le sfere C_1, C_2, C_3 non avranno alcun punto a comune da C in fuori.* — Orver, che è lo stesso: « Se « in ordine ai punti A, B, C, D si verifica, che qualche punto diverso da D sia « distante da A e da B quanto D ; ma, salvo D , nessun altro punto disti da ognuno « degli A, B, C quanto D ; allora non punto diverso da C può distare dagli A, B, D « quanto C . » Cfr. P 13.

P 31 — *Tr.* « Dati i punti non collineari A, B, C ; se avviene che un punto D « appartenga al piano ABC , ma non alla retta AB , allora il punto C starà nel piano « ABD . » Cfr. P 14. [Corollario della precedente P 30, avuto riguardo alle P 27, 26, 11, 23.]

POSTULATO XI.

P 32 — *Se, essendo A, B, C, D punti dati ed M un punto arbitrario, le tre sfere D_1, D_2 e D_3 non abbian punti a comune da D in fuori; allora ogni punto*

comune alle sfere M_1, M_2, M_3 dovrà stare eziandio sulla sfera M_0 . — O, se ci piace: « Ogni qual volta A, B, C, D, M sono punti, e, salve D , nessun altro punto è dista da ognuno degli A, B, C quanto D ; allora ogni punto, che disti dagli A, B, C quanto M , disterà inoltre da D quanto M . » Cfr. P 16. — Ne viene, che « Se a tre punti dati non collineari si può coordinare una coppia di punti equidistanti da ognuno di quelli (a sè considerato), gli stessi due punti saranno eziandio equidistanti da qualsivoglia altro punto del piano, che unisce i tre punti dati ».

P 33 — Tr. « Se, essendo A, B, C punti non collineari, D sia un punto del piano ABC , non però della congiungente A con B ; i due piani ABC e ABD coincideranno. » Cfr. P 17. [L'Ipotesi, involge, che A, B, D non collinano (P 23) e che C appartiene al piano ABD . Ora, supposto che M sia un punto arbitrario del piano ABD , il fatto che l'intersezione delle tre sfere M_1, M_2, M_3 si riduce al solo punto M (P 27), e l'altro che $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_0$ (P 32) e per conseguenza $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_0 \cap M_0$, portano seco di necessità che $M \in ABC$: onde $ABD \cap ABC$. Ma di qui si deduce $ABC \cap ABD$, poi che lo scambio dei punti C e D non infirma la verità dell'Ipotesi, come abbiamo visto.]

P 34 — Tr. « Qualunque siano i punti non collineari A, B, C , se D ed E sono punti del piano ABC , pur che non giacciano allineati con A , sarà giuoco forza che il piano ADE coincida col piano ABC . » [Per Ipotesi, abbiamo, che B ed A , come pure A e D , son diversi tra loro (P 22), e che uno almeno dei punti D ed E sarà escluso dalla congiungente A con B (P 19, 12, 23). Ora, se D non giace in AB , coincideranno i piani ABC e ABD , grazie al tr. precedente; e il punto E giacerà in conseguenza sul piano ABD (P 23), senza giacere in AD (P 22). Dunque, in virtù dello stesso tr. coincideranno anche i piani ABD, ADE ; onde $ABC = ADE$. Di poi, se E non giace in AB , si deduce per egual modo che $ABC = ABE = AED = ADE$. E però in ogni caso $ABC = ADE$: c. v. d.]

P 35 — Tr. « Di nuovo essendo A, B, C punti non collineari; se avverrà che « tre punti D, E, F , eziandio non collineari, appartengano al piano ABC , bisognerà che i piani ABC e DEF si confondano. » — Cfr. P 19. In breve: « Due piani, che abbian tre punti (non allineati) a comune, coincidono ». Ovvero: « Ciascun piano è individuato da tre de' suoi punti, che non sian per diritto fra loro ». [Non può darsi che siano collineari i punti A, D, E , o in pari tempo collineari anche i punti A, E, F e i punti A, D, F : poi che ciò implicherebbe l'esistenza di un allineamento fra i punti D, E, F (P 24), che è contro l'Ipotesi. Ora — se per es. i punti A, D, E non collinano — è forza concludere che $ABC = ADE$ (P 34), vale a dire $ABC = DEA$ (P 28), quindi che $F \in DEA$ e p. c. che i piani DEA, DEF coincidono (P 33): onde resta provata la coincidenza di ABC con DEF . E di qui nasce, attraverso le sostituzioni $\begin{pmatrix} F, E \\ E, F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F, D \\ D, F \end{pmatrix}$, che l'una o l'altra delle ipotesi « A, D, F non collinano » ed « A, E, F non collinano » richiederà che ABC si confonda con DEF , oppure con FED : dunque $ABC = DEF$ in ogni modo.]

P 36 — Tr. « Dall'essere A, B, C punti non collineari e D, E punti non collineari del piano ABC si deduce che la congiungente di questi, ossia la retta DE , giace tutta nel piano ABC . » [Non potendo coesistere i tre allineamenti (D, E, A) ,

(D, E, B), (D, E, C) — perchè ne uscirebbero allineati anche i punti A, B, C (P 24) — sian per es. A, D, E non collineari. Allora coinciderebbero i due piani ABC, ADE (P 34): e la retta DE, che giace nel piano ADE (P 23), sarà dunque nel piano ABC. Ecc.). — Appresso ne verrà fatto parlare dell'ente generico 'piano' (e 'classe dei piani'); sottintendendo — è quasi superfluo il dichiararlo — una definizione simile a quella non ha guari proposta per l'ente 'retta' (P 26).

P 37 — Tr. « Non possono coesistere due piani distinti, ciascuno dei quali « contenga una retta data e un punto dato fuori di essa, ovvero due rette date le « quali s'incontrino senza coincidere: ma un piano soddisfacente a questa condi- « zione esiste per certo. » — Essendo r una retta ed A un punto esterno, il 'piano Ar' (congiungente A con r) è quel piano — determinato ed unico — il quale congiunge A con due punti arbitrari di r , pur che diversi fra loro: giurta le P 27, 28, 35. Ecc.

P 38 — Df. « Quattro o più punti dati son da chiamar 'complanari' o 'com- « plani', se esiste un piano che li contenga tutti ad un tempo: cioè se esistono tre « punti non collineari X, Y, Z, per modo che i punti dati appartengano ad XYZ ». Cfr. P 21.

P 39 — Tr. « Quattro punti saranno per certo complanari, se avviene che « tre di essi collimino, o due di essi coincidano. E se non son complanari, « converrà che ciascuno sia escluso dal piano degli altri tre. » Cfr. P 22. — L'esistenza di punti non complanari sarà stabilita più tardi. Vedi P 16 § 2.

P 40 — Df. « Un 'cerchio' è la classe dei punti che giacciono sopra una « sfera, e al tempo stesso in un piano che ne contenga il centro. Il quale è « anche 'centro del cerchio'; mentre quel piano sarà il 'piano del cerchio'. » — Per es. nel piano di tre punti non collineari A, B, C, la classe dei punti che distan da A quanto B sarà un cerchio: e precisamente l'intersezione del piano ABC con la sfera B_A . — Pur che non s'incorra in ambiguità, questi medesimi simboli B_A , C , ecc. denoteranno anche *cerchi*: così nell'es. predetto, se il discorso si aggira intorno a figure esistenti nel piano ABC (come spesso accade), allora il 'cerchio di B, centro A' si può indicar tuttavia con ' B_A '.

POSTULATO XII.

P 41 — Sulla retta che unisce due punti non coincidenti A e B vi sarà un qualche punto M, per cui la sfera di A circa M passi anche da B. — O, sotto altra veste: « Per ogni coppia di punti A e B diversi l'uno dall'altro esisterà « qualche punto egualmente distante da A e da B e tale ancora, che nessun punto « diverso da quello dista da A e da B come quello ».

P 42 — Tr. « Un tal punto M è diverso da A e da B; e due punti quali M « non possono certo coesistere, se non coincidono ». [Invero, se M coincidesse con A, non potrebbe il punto B giacer sulla sfera A_M (P 9); se M coincidesse con B, la sfera A_M , in quanto passa per B, conterrebbe M (P 8), il che non può stare (P 8), poi che B (e con esso M) è diverso da A. Se ora esistesse in AB qualche punto N diverso da M eppur tale, che B appartenesse alla sfera A_N , il punto B risulterebbe

comune ad ambo le sfere A_u e A_v , mentre A giacerebbe sopra la retta MN (P 12, 19): due fatti contraddittori, poi che nel secondo si afferma (P 11) che le sfere A_u e A_v non s'incontrano fuori di A .]

P 43 — *Df.* « Sempre che A, B siano punti e A diverso da B , si chiamerà « punto medio (o centro) della coppia A, B », ovvero « punto medio fra A e B », quel punto della congiungente A con B — sia per esempio M — in ordine al quale succede che la sfera di A , centro M , passa anche per B : ossia quel punto di AB , dal quale A e B sono egualmente distanti. » (Che esista un tal punto o che ammetta una sola determinazione, è già detto nelle P 41, 42). « Ma se per l'opposto i punti A e B si confondono in uno, quest'uno sarà il « punto medio, o centro, di (A, B) ». E, nell'un caso e nell'altro, il punto medio di (A, B) s'indicherà con « $A|B$ ». — Osservate che uno stesso punto è centro di ambo le coppie (A, B) e (B, A) , vale a dir che $B|A = A|B$. Etc.

POSTULATO XIII.

P 44 — *Premesso che A, B sono punti e A diverso da B ; la sfera di B , centro A , e la congiungente A con B s'incontrano ancora in un punto diverso da B , ma non possono tagliarsi in più punti diversi fra loro e da B .* — Cioè « Premesso ecc., esisterà sulla sfera B , un sol punto S diverso da B , per cui le sfere B , ed S , non s'incontrino fuori di S . O, se ci piace: « Posto che i punti A e B non coincidano, esiste un sol punto diverso da B , ma distante da A quanto B ; sotto condizione che nessun punto diverso da quello disti da A e da B come quello ». — Che il punto B appartenga sì all'una che all'altra figura, già si sa da P 6 e P 12: ma in P 44 si afferma, che l'intersezione di AB con B , non si restringe a quel punto, anzi consiste in due punti, uno dei quali è B , l'altro è diverso da B (né può coincidere con A , data la P 8 § 1).

P 45 — *Df.* « Sotto la stessa Ipta, la locuzione « equinverso, o simmetrico, di B rispetto ad A » vien posta a significare quel punto diverso da B , che giace ad un tempo sulla sfera di B circa A o sulla congiungente A con B . » Vedi P 44. Ma se (contro il supposto) coincidono i punti A e B , la stessa frase denoterà il punto A . E in ambo i casi il simbolo « $B|A$ » starà invece di « simmetrico di B rispetto ad A ». — Osservate che, detto M il punto medio di A e B , ciascuno di questi punti A e B sarà il simmetrico dell'altro rispetto ad M (saranno A e B punti l'un l'altro simmetrici rispetto ad M), e che, viceversa, da $B' = B|A$ si deduce $A = B|B'$ e per conseg. $B = B'|A$: vedi P 43. — « Dato un punto A a piacere, quella relazione scambievolmente, o corrispondenza, che intercede fra qualsivoglia punto ed il suo simmetrico rispetto ad A , si vuol chiamar « simmetria rispetto ad A » od « equiversione rispetto ad A » (A sarà il « centro » di simmetria). E « simmetria rispetto ad un punto », od « equiversione » sarà il nome generico d'ogni corrispondenza siffatta. La simmetria rispetto ad A può indicarsi col simbolo « $/A$ »: essa costituisce una perfetta rappresentazione della classe « punto » sopra se stessa; è insomma una trasformazione nulvoca dei punti in punti; anzi una trasformazione inversiva o

reciproca, e di più involuteria (*). — Da P 44 emerge anche il fatto, che nessun punto diverso da A è simmetrico di sè medesimo: cioè che, rispetto all'equivalenza, nessun punto diverso dal centro è 'tautologo'.

P 46 — Tr. « Qualunque sia il punto A, l'equivalenza rispetto ad A centra vertè in sè stessa punto per punto ogni sfera descritta intorno ad A come centro: vale a dire, se B e C sono punti e C spetta alla sfera B, questa passa altresì per i punti B/A e C/A. E similmente ogni $\left. \begin{matrix} \text{retta} \\ \text{piano} \end{matrix} \right\}$ che passi per A è figura 'simmetrica di sè medesima' (od 'autosimmetrica') rispetto ad A. » [Così da P 45, 17, 36, ecc.]

POSTULATO XIV.

P 47 — *Essendo A, B, C punti non collineari, le sfere C₁, C₂ e il piano ABC s'incontrano ancora in un punto diverso da C, ma non possono tagliarsi in più punti diversi l'uno dall'altro e da C.* — Ovvero: « Se nel medesimo piano due cerchi, non aventi il medesimo centro, s'incontrano fuor della linea dei centri, essi avranno due punti a comune l'un l'altro distinti, e non più. Vedi P 40 ». Cfr. Eccl., lib. 3°, prp. X. — Ed anche potremo, secondo i gusti, adettar l'una e l'altra delle seguenti versioni: « Sul piano dei punti non collineari A, B, C deve esistere un punto, che disti da A e da B quanto C, pur essendo diverso da C: ma ogni altro punto del piano, il quale disti da A e da B quanto C, coinciderà con quello e con C ». — Premesso che A, B, C sono punti, A diverso da B; se qualche punto diverso da C disti da A e da B quanto C, allora esiste un sol punto diverso da C, che dista da A e da B quanto C sotto condizione, che nessun punto diverso da quello disti dagli A, B, C come quello ». La quale ultima ferma ha il pregio di escludere i termini non primitivi 'retta', 'piano', 'sfera', 'collineari', ecc.

P 48 — Tr. « E presi a piacere due punti D ed E sulla retta che unisce A e con B, sempre che questi punti D ed E non coincidano, bisognerà che la coppia dei punti comuni ad ambo le sfere C₁ e C₂ e al piano ABC si confonda con quella dei punti comuni ad ambo le sfere C₁, C₂ e al piano ABC. » [Invero ambe i cerchi descritti dal punto C intorno a D ed E sul piano ABC (P 40) passeranno dai punti comuni alle sfere C₁ e C₂ e al piano ABC, poichè vi passano le sfere C₁ e C₂ — grazie a $\begin{pmatrix} D, O \\ O, M \end{pmatrix}$ P 16 e $\begin{pmatrix} E, C \\ C, M \end{pmatrix}$ P 16 — e non avranno altri punti a comune, in virtù di $\begin{pmatrix} D, E \\ A, B \end{pmatrix}$ P 47.]

P 49 — Df. « Di nuovo essendo A e B punti diversi fra loro, C un punto escluso dalla congiungente A con B; per 'simmetrica di C rispetto ad AB' s'intende quel punto del piano ABC, che appartiene ad ambo le sfere C₁ e C₂, ma è diverso da C. E se al contrario C è punto di AB, allora il 'simmetrico di C rispetto ad AB' sarà per d'ora lo stesso punto C. Il punto così definito si rappresenta col simbolo C/AB. » — Le P 47, 48 stanno a far fede, che un siffatto

(*) Vedi la nota IV in Appendice.

punto esiste ed è uno; e che non tanto è subordinato alla coppia di punti A, B, quanto alla lor congiungente AB. — Sarà manifesto anche qui, come dianzi, che se C' è il simmetrico di C rispetto ad AB, alla sua volta C è il simmetrico di C' — Se dunque r è una retta e C un punto arbitraria, è già detto oramai che s'intenda per « *simmetrico di C rispetto ad r* ». Ciò significa « il punto C, se questo appartiene ad r ; se no quel punto diverso da C, che a tenor delle P 47, 48 è comune allo sfere di C intorno a due punti A e B di r (non importa quali, purchè diversi fra loro) e al piano ABC ». — Data una retta r a piacere, la relazione o corrispondenza — simboleggiata in ' r ' — che intercede fra ciascun punto e il simmetrico rispetto ad r prende nome di « *simmetria rispetto ad r* », o « *semigiro intorno ad r* » (r è l'« *asse di simmetria* »). E « *simmetria rispetto a una retta* », « *simmetria assiale* », « *semigiro intorno ad un asse* », ecc. sarà il nome generico d'ogni corrispondenza siffatta. — La « *simmetria rispetto ad r* » (r essendo una retta) è una perfetta rappresentazione della classe « punto » sopra sè stessa, una « *trasformazione univoca, reciproca e involutoria dei punti in punti* »: in quanto coordina a ciascun punto un punto ed uno solo, in maniera che un punto dato a piacere è sempre il simmetrico d'un certo punto, e non di più punti diversi; e inoltre ogni punto è il simmetrico del suo simmetrico. — Emergo ancora da P 47 — avuto riguardo a P 23 — che, sebbene per effetto della simmetria odo si parla ciascun punto dell'asse è *tautologo*, cioè convertito in sè stesso (il semigiro « *tien fermo* » ogni punto dell'asse) fuor di quest'asse di simmetria non esiste alcun punto tautologo (!).

P 50 — Tr. « La simmetria rispetto ad un asse dee convertire in sè stessa « punto per punto ogni sfera, che abbia il centro sull'asse, e in sè stesso ogni piano « che passi per questa retta. » [Siano A un punto arbitrario dell'asse r . C un punto escluso da questa retta e D un punto a piacere sopra la sfera C_1 : dico che il punto D/ r , simmetrico del punto D rispetto ad r , giacerà su quella medesima sfera. Invero, se D fosse per avventura un punto comune alla retta e alla sfera, quel punto D/ r coinciderebbe con D sulla sfera (P 49). Ora, se D non appartiene ad r , il suo simmetrico sarà tanto a giacere sul piano Dr, che unico D con r , o sopra ogni sfera che abbia il centro in r e passi per D (P 48, 49): dunque ancor sulla sfera C_1 . Il resto al Lettore.]

P 51 — Df. « Dati tra punti non collineari A, B, C, per « *ribaltamento del piano ABC su sè stesso, intorno ai punti A e B come cardini* » — o « *intorno alla retta AB come perno* » — s'intenderà quella mutua corrispondenza fra i « *punti del piano ABC (simmetria del piano ABC con sè stesso, rispetto alla retta AB come asse)* », che viene implicata dal semigiro intorno ad AB, giusta la prps. precedente. »

POSTULATO XV.

P 52 — Essendo r una retta e C un punto escluso da questa, se per due punti D ed E si verifica, che E stia sulla sfera di D circa C, sarà giuoco/forza che il

(!) Vedi Nota IV in Appendice.

punto E' appartenga alla sfera del punto D' intorno al punto C/r . — Oppure:
 « Ogni qualvolta due punti sono equidistanti da un terzo, eziandio i loro simmetrici
 rispetto a un asse arbitrario equidistano dal simmetrico del terzo punto ». Vedi
 P 50. — Quindi è che per simmetria rispetto ad un asse ogni sfera si specchierà
 in una sfera, e il centro dell'una avrà come immagine il centro dell'altra: vale a
 dire, se quanti si vogliano punti disteranno egualmente da un medesimo punto
 C (giaccia o no questo sull'asse di simmetria), così anche i loro simmetrici dal punto,
 che corrisponde a C . — Chi volesse eliminare dall'anzidetto principio (per mezzo
 delle defn. precedenti) ogni traccia di locuzione geometrica non primitiva, potrebbe
 sempre enunciare, ad es., sotto quest'altra forma:

« Dati i punti A, B, C, D, E , con A diverso da B, D, E equidistanti da C :
 « se tre punti C', D', E' sono tali, che ognuna delle tre coppie $(C, C'), (D, D'),$
 « (E, E') soddisfi alla condizione: « X' è diverso da X , ma dista da A e da B quanto
 « X ; e nessun punto diverso da X' dista dagli A, B, X quanto X' »: eppur se una
 « tal condizione si avvera soltanto nei punti C e C', D e D' ; laddove $E' = E$, e non
 « esiste alcun punto diverso da E , che dista da A e da B quanto E : allora anche
 « i punti D' ed E' disteranno egualmente dal punto C' ».

P 53 — Tr. « Per effetto di simmetria rispetto ad un asse, più punti collin-
 « eari si specchiano sempre in punti eziandio collineari; vale a dire ogni retta
 « si rappresenta in una retta; e allo stesso modo i simmetrici di tutti i punti d'un
 « piano riproducono un piano. » [Siano A e B punti dati a piacere purchè non coin-
 « cidenti, ed X un punto arbitrario della lor congiungente: il punto $A' = A/r$ (r essendo
 « una retta arbitraria) sarà diverso dal punto $B' = B/r$ (P 47, 48, 49). Si vuol dimo-
 « strare, che il punto $X' = X/r$ è tenuto a giacer sulla retta $A'B'$. Infatti le sfere
 « X_A ed X'_A descrivono simmetriche l'una dell'altra rispetto ad r (P 52), per modo
 « che ciascuna punto dell'una si specchia in un punto dell'altra e viceversa, senza ecce-
 « zione o restrizione di sorta: e lo stesso è da dire circa le sfere X_B e X'_B . Se dunque
 « le sfere X'_A e X'_B avessero di comune alcun punto diverso da X' — puta caso un
 « punto Y' — similmente le sfere X_A e X_B dovrebbero tagliarsi in un punto diverso
 « da X , vale a dir nel simmetrico di Y' : il che non è per lpts. (P 11). Dunque X'
 « appartiene alla congiungente di A' o B' (ivi). — Ora poniamo che C sia un punto
 « straniero alla congiungente A con B , e che X denoti un punto qualsiasi del piano
 « ABC : con argomentazione in tutto simile alla precedente e appellandosi a P 27 si
 « proverà che il punto X' è obbligato a giacere sul piano $A'B'C'$. Sicchè le due rette
 « AB e $A'B'$, come pure i due piani ABC e $A'B'C'$ son figure simmetriche l'una dell'altra
 « rispetto all'asse r : ecc.]

P 54 — Tr. « Ogni qualvolta due punti son simmetrici l'uno dell'altro rispetto
 « ad un asse, il lor punto medio appartiene a quest'asse. E ogni retta simmetrica
 « di sè medesima taglierà l'asse in un punto (seppur non coincide col l'asse). » [I
 « punti dall'asse C e D , ed r sia l'asse di simmetria: si può conceder che C non
 « appartenga ad r . Pongasi $E = C/D$ (P 43). Il semigiro intorno ad r commuta i punti
 « C e D fra loro, quindi converte in sè stessa la retta CD (P 53, 12): onde il sim-
 « metrico di E rispetto ad r — sia per es. F — dovrà appartenere a CD . Inoltre alla
 « sfera C_r corrisponde la sfera D_r (P 52): e poichè quella passa per D (P 43) con-

verrà che quest'altra passi per C. Dunque F sarà il punto medio fra i punti D e C (ivi), per la qual cosa F coinciderà con E (P 42). Ma nessun punto esterno all'asse r può coincidere col suo simmetrico (P 49): dunque E appartiene ad r . — E pertanto ogni retta s , la quale sia convertita in sé stessa dal semigiro intorno ad r e non si confonda con r , dovrà tagliar questa in un punto: visto che in s ci sarà sempre un punto esterno ad r ; ed s coinciderà con la retta che unisce un tal punto col suo simmetrico rispetto ad r (P 19).]

P 55 — Tr. — Se per tre punti non collineari A, B, C si dà il fatto, che C appartenga alla sfera di B, centro A, nessun punto diverso da B e da C potrà essere comune alla sfera B_1 e alla retta BC. — Insomma 'una retta non può incontrare una sfera in più di due punti distinti'. Vedi P 44. [Osservate che la simmetria rispetto a BC converte in sé stesso ogni punto di questa retta; per la qual cosa, considerando a tenor di P 52 la sfera B_1 , che il semigiro intorno alla retta BC contrappone alla sfera B_1 (A' essendo il simmetrico del punto A) è forza concludere che ciascun punto comune alla sfera B_1 e alla retta BC deve esindio appartenere alla sfera B_1 . D'altra parte i punti A e A' son diverui fra loro. (Ipts. P 47, 49); nè può darsi che il punto B appartenga alla congiungente AA', dal momento che un punto diverso da B (voglio dire il punto C) è comune ad ambe le sfere B_1 e B_1 . Dunque i punti A, B, A' non collimano; e per conseg. ogni punto comune alla retta BC e alla sfera B_1 sarà sempre comune alle sfere B_1 e B_1 e al piano ABA'. vale a dire comune ai due cerchi B_1 e B_1 di esso piano. Ma questi cerchi, passando per B e per C, non s'incontrano altrove (P 47): dunque nessun altro punto è comune a quelle figure, e. v. d.]

§ II.

*Ortogonalità fra due rette, o fra una retta ed un piano, e tra due piani.
S'introduce la rotazione intorno ad un asse. Simmetria rispetto ad un piano o spezzamento. Proprietà diverse in ordine a rette, piani e sfere.*

P 1 — Tr. — Sempre che i punti A e B non coincidano: qualunque volta due punti l'un l'altro simmetrici rispetto ad A distaranno egualmente da B, saranno anche simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla congiungente A con B. — [Siano C e C' quei punti, e C diverso da A, quindi anche da C' (P 44, 45 § 1). L'Ipts. che questi punti appartengano, sì l'un come l'altro, alle sfere C_1 , C_2 e alla retta CA, farà esser C esterno alla congiungente A con B, e C' sul piano ABC (P 11, 28 § 1): onde $C' = C/AB$ (P 40 § 1).]

P 2 — Tr. — Se, essendo A, B, C punti non collineari, il simmetrico di C rispetto ad AB stia nella retta CA, sarà tutt'uno col simmetrico di C rispetto ad A. — [Posto $C' = C/AB$, il punto medio fra C e C' dovrà giacere ad un tempo in AB e in CC' (P 54, 43 § 1). Ma $CC' = CA$, dal momento che per Ipts. C' appartiene a CA, ma è diverso da C (P 17, 22, 49 § 1). Dunque esso punto coinciderà con

A, poichè questo è il solo punto comune alle rette AB e CA: e d'altra parte il fatto che $A = C/C'$ involge $C' = C/A$ (P 45 § 1).]

Di qui e dalle P 53, 54 § 1 si raccoglie il seguente:

P 3 — Tr. « Premesso che i punti A, B, C non collinano, due qualunque delle « condizioni: 1) 'il punto C/A appartiene alla sfera C_A '; 2) 'il punto C/AB spetta « alla congiungente CA'; 3) 'i punti C/A e C/AB coincidono' sono sempre impli- « cate dalla condizione che resta. Inoltre il verificarsi d'una qualunque di esse in- « volgerà senza più, che il semigiro intorno la retta AB converta la sè stessa la « congiungente AC — e viceversa ».

P 4 — Tr. « Sotto la stessa Ipt., se il semigiro intorno ad AB converte in « sè stessa la AC, reciprocamente la AB sarà convertita in sè stessa dal semigiro « intorno ad AC. » [Sia $C' = C/A$, $B' = B/A$: si dimostra che il punto B' non differisce dal simmetrico del punto B rispetto alla retta CA — dopo di che basterà ri-

chiamarsi a $\left(\begin{smallmatrix} C, A \\ M, C \end{smallmatrix} \right)$ P 3. Invero, detti B' ed M i punti B/AC e B/B', si sa da una parte che M appartiene ad AC (P 54 § 1) e dall'altra che il semigiro intorno ad AC tien fermo C' e scambia le sfere C_A e $C_{A'}$ fra loro (P 52 § 1): onde il punto C' in quanto appartiene a C_A per Ipt., dovrà essendogli appartenere a $C_{A'}$. Ma dall'essere C' un punto comune alle sfere C_A e $C_{A'}$ ed M un punto giacente in BB", ne vien che C' appartiene alla sfera C_A , giusta $\left(\begin{smallmatrix} A', M, C' \\ A, C, M \end{smallmatrix} \right)$ P 16 § 1. Dunque M coincide col punto medio fra C e C', e però si confonde con A (P 45 § 1): dunque sarà B' il simmetrico di B rispetto ad A, che è quanto dir B' = B': c. v. d.]

P 5 — Df. « Quando si parla di rette, la locuzione '*r* è perpendicolare « ad *s*' — simboleggiata in '*r* ⊥ *s*' — serve ad esprimere qualmente la retta *r* « è simmetrica di sè medesima ed autosimmetrica rispetto alla retta « *s*, ma non coincide con questa ». — Ved. P 49, 53 § 1. — O, in altri termini: « Essendo *s* una retta, si dirà '*perpendicolare, ortogonale, o normale*, « ad *s*' ogni retta (diversa da questa) che per mezzo del semigiro intorno ad *s* « ricada su sè medesima ». — In P 54 § 1 già si afferma implicitamente che, se una retta è p. pendicolare ad un'altra, le due rette si taglieranno in un punto. Ma dalla P 3 emerge altresì che, date due rette *r*, *s* concorrenti in un punto — sia per es. A — a cercarsi che l'una *r* è normale all'altra *s* basterà confermar l'esistenza d'un punto il quale, giacendo in *r* ma fuori di *s*, disti da un punto di *s* — non importa quale, purchè diverso da A — quanto il suo simmetrico risp.^a ad A; oppure sia tale, che il suo simmetrico risp.^a ad *s* non esca da *r*; o tale, che i suoi simmetrici risp.^a ad A e ad *s* coincidano.

P 6 — Tr. « Se una retta è perpendicolare ad un'altra, alla sua volta quest'altra « è perpendicolare alla prima: cioè le due rette saranno 'perpendicolari fra loro' ». [Sia la retta *r* perpendicolare alla retta *s*, ed A denoti il loro punto comune (P 5). Sulla *r* esiste per certo un punto C e sulla *s* un punto B, l'uno e l'altro diversi da A (P 26 § 1); onde $r = AC$, $s = AB$; e tre punti A, B, C così fatti non sono per certo allineati, dal momento che *r* è diversa da *s*. Ora, poichè il semigiro intorno ad AB converte in sè stessa la AC (P 5), non *r* è altro che da richiamarsi a P 4].

P 7 — Tr. « Ogni qualvolta le rette r, s sian perpendicolari fra loro, se si toglie in una qualunque di esse — p. es. in r — un punto C a piacere, purchè diverso dal punto comune A, allora: 1) Il simmetrico di C risp.^a ad s sarà sempre in r e si confonderà col simmetrico di C risp.^a ad A; 2) I punti C e C' distanti ranno egualmente da ciascun punto di s . Eucl., lib. 3.^a, prp. 111. [Il punto C/s dovrà cader sulla retta CA, posto che per Ipt. questa è simmetrica di sé medesima rispetto ad s . Ora, tolto anche in s un punto B a piacere, purchè diverso da A (e visto, come dianzi, che i punti A, B, C non collinano), potremo appellarci a P 4: ecc.].

P 8 — Tr. « Se di nuovo A, B, C siano punti non collineari, e la retta AC perpendicolare alla AB, non si può dar che la sfera di A centro B e la congiungente A con C s'incontrino fuori del punto A. Eucl., lib. 3.^a, prp. XVI. [Se esistesse un punto diverso da A, ma come questo comune alle A, ed AC, bisognerebbe che il suo simmetrico intorno la retta AB fosse un punto esandio comune a quelle figure; però che ognuna di esse è convertita in sé stessa dal semigiro intorno ad AB (P 50 § 1, P 5). Esisterebbero dunque tre punti ai tutti diversi fra loro e comuni alla retta e alla sfera: il che non può darsi (P 55 § 1)].

P 9 — Tr. « Dati a piacere una retta r e un punto esterno C, si può sempre trovar sulla retta un tal punto A, per cui la retta CA sia perpendicolare ad r : ma in r non possono coesistere due punti A e B l'uno l'altro distinti e tali, che ognuna delle due rette CA e CB sia ortogonale ad r . — È quanto dire che « Da un punto esterno si può abbassare, o calare, una retta perpendicolare alla data, ma non più d'una ». Eucl., lib. 1.^a, prp. XII. [Tolga il punto C', simmetrico del punto C rispetto ad r ; indi il punto medio fra C e C', che chiameremo A. Questo punto dovrà giacere in r (P 54 § 1); e la retta CA sarà perpendicolare alla r , in virtù di P 4, 5. — Di poi, se esistesse in r qualche altro punto B, per cui fosse egualmente CB perpendicolare ad r , la simmetria rispetto ad r convertirebbe ciascuna delle CA, CB in sé stessa (P 5): dunque in sé stesse anche C, poichè questo è il solo punto comune a quelle due rette (P 19 § 1, ecc.). Ma il punto C, come esterno all'asse r , non è rispecchiato in sé stesso (ivi). Dunque un tal punto B non esiste].

P 10 — Tr. « Dati i punti non collineari A, B, C; se avvien che la congiungente A con C e la sfera di A circa B — oppure la congiungente di A con B e la sfera di A centro C — non s'incontrino fuori di A, bisognerà che le rette AC ed AB sian perpendicolari fra loro ». Eucl., libro 3.^a, prp. XVIII. Poichè che AC non sia perpendicolare ad AB, Vi sarà dunque in AC un punto diverso da A, e sia p. es. D, per cui la retta BD è normale alla retta AD (P 9): onde questa, per effetto del semigiro intorno a BD ricadrà su sé stessa (P 6, 5); ed A verrà in qualche punto, certamente diverso da A. Ora, un tal punto dovrebbe stare ad un tempo così nella retta AD, come sulla sfera A. (P 50 § 1, ecc.): la qual cosa è contraria all'Ipt., però che la AD si confonde con la retta AC (P 17 § 1). Dunque AC \perp AB; ecc.]. — La presente e la P 8 insieme congiunte fanno il teorema: « Acciò che una retta e una sfera passanti per un medesimo punto si tocchino (siano tangenti fra loro) in questo — cioè non s'incontrino altrove — è ne-

cessarie e basta, che quella retta sia ortogonale alla congiungente il detto punto col centro della sfera ».

P 11 — Tr. « Se è vero ad un tempo che i punti A, B, C non collimano; che D sia un punto del piano ABC, per altro esterno alla retta AB e diverso da C; e che le rette AC e AD sian l'una e l'altra perpendicolari alla AB; sarà vero « altresì che i punti A, C, D collineano ». — Qui abbiamo insomma la prpa. che si vuole enunciare dicendo: « Ad una retta data e da un punto dato in essa non si potranno elevare, in un medesimo piano coa questa retta, due diverse perpendicolari ». [Sia B' il simmetrico di B rispetto ad A. Perchè la AC è normale alla AB, i punti B e B' saranno equidistanti da C (P 7); e perchè la AD è normale alla AB, saranno essiandio equidistanti da D: insomma comuni alle sfere B_c e B_a; sicchè B non appartiene alla retta CD (P 11 § 1, ecc.). Ma essi giacciono ancora sul piano BCD, che non differisce dal piano ABC (P 28, 33 § 1): sono dunque simmetrici l'uno dell'altro rispetto all'asse CD (P 49 § 1), onde il lor punto medio A appartiene a CD: e. v. d.].

P 12 — Tr. « Sempre che A, B, C siano punti non collineari, se più sfere passanti per A e per B sono tali, che i loro centri appartengano al piano ABC, questi centri saranno tutti allineati sopra una retta perpendicolare alla congiungente A e B. — Orver, che è lo stesso: « Due punti dati a piacere in un piano e diversi fra loro equidistano sempre da qualche punto del piano, esterno alla lor congiungente ». Cfr. P 41 § 1. — È sotto forma primitiva (ovvia scelta da ogni legame con le definizioni precedenti): « Premesso che A, B, C sono punti, A diverso da B; se qualche punto diverso da C dista da A e da B quanto C, « dovrà esistere un punto, dal quale disti A quanto B, sotto condizione che qualche punto diverso da quello disti da A e da B come quello, ma nessun punto diverso da quello disti da ognuna degli A, B, C come quello ». Cfr. P 41 § 1.

POSTULATO XVI.

P 13 — Se A, B, C sono punti non collineari, esiste almeno una sfera che passa per A e per B, ed ha il centro nel piano ABC, ma fuori della congiungente A e B. — Orver, che è lo stesso: « Due punti dati a piacere in un piano e diversi fra loro equidistano sempre da qualche punto del piano, esterno alla lor congiungente ». Cfr. P 41 § 1. — È sotto forma primitiva (ovvia scelta da ogni legame con le definizioni precedenti): « Premesso che A, B, C sono punti, A diverso da B; se qualche punto diverso da C dista da A e da B quanto C, « dovrà esistere un punto, dal quale disti A quanto B, sotto condizione che qualche punto diverso da quello disti da A e da B come quello, ma nessun punto diverso da quello disti da ognuna degli A, B, C come quello ». Cfr. P 41 § 1.

P 14 — Tr. « Sotto la stessa Ipta., sempre esiste nel piano ABC, ma fuor della retta AB, qualche punto D per cui la retta DA sia normale alla AB ». — O, sotto altra veste: « Dati a piacere un piano, in questo piano una retta e in questa retta un punto, si può sempre in quel piano e per questo punto innalzare (e elevare) una retta perpendicolare alla data ». — EUCL., lib. 1°, prp. XI. [Che non si possa condurre da A e nel piano ABC due diverse perpendicolari ad AB, già si sa da P 11. — Ora tolgasi il punto B', simmetrico di B rispetto ad A; e nel dato piano ABC sia D un punto equidistante da B e B', ma diverso da A (P 13): la retta AD sarà perpendicolare alla AB (P 4, 5)]. — E di qui si può tosto concludere — avuto riguardo alla P 6, 7, 12 — che:

P 15 — Tr. « Il luogo geometrico d'un punto equidistante da due punti « dati (l'un l'altro distinti) e giacente in un piano dato che passi per questi, è una « retta; anzi è la retta perpendicolare alla congiungente dei punti stessi nel loro « punto medio ».

POSTULATO XVII.

P 16 — *Sempre che gli A, B, C siano punti non collineari, esisterà un punto almeno, le di cui sfere intorno A, B, C si tagliano in qualche altro punto diverso da quello.* — Insomma (P 27 § 1): « Dato a piacere un piano, esisterà tuttavia qualche « punto, che non appartiene al piano ». Cfr. P 15 § 1. — Nè vi sono difficoltà per tradurre codesta prop. nel linguaggio primitivo del 'punto' e dell' 'equidistanza': « Purchè A, B, C siano punti, A diverso da B; se qualche punto diverso da C « dista da A e da B quanto C, vi saranno almeno due punti diversi fra loro, cia- « scuno dei quali dista da A, da B e da C quanto l'altro ».

P 17 — Tr. « Se una retta è perpendicolare a due altre rette che si segano, nel « loro punto d'intersezione, sarà eziandio perpendicolare ad ogni retta che giaccia « nel piano di queste e passi dal loro punto comune ». — EUCL., lib. 11°, prp. IV. [Siano A, B, C punti non collineari; D un punto del piano ABC, non però coinci- « dente con A; ed M un punto fuor di esso piano. Se avverrà che ciascuna delle due « rette AB, AC sia perpendicolare alla congiungente A con M, dico che questa sarà « perpendicolare alla AD. Tolgasi il punto N = M/A. Percchè la retta MA è ortogo- « nale alla AB, converrà che i punti M, N equidistino dal punto B (P 7); e perchè la « stessa MA è altresì perpendicolare alla AC, converrà che quei punti M, N equidi- « stino ancora dal punto C. Dunque ognuno dei punti A, B, C sarà equidistante dai « punti M, N e p. e. anche il punto D, in quanto giace sul piano ABC (P 32 § 1). Or « dunque $AM \perp AD$ (P 5): c. v. d.].

P 18 — Df. « Una retta si dice *'perpendicolare, o normale, ad un « piano'*, quando è normale a tutte le rette che, la incontrano e sono nel piano ». — EUCL., lib. 11°, defn. III. Onde il Tr. prec. prende anche la forma: « Qualunque « volta una retta è perpendicolare a due rette che si segano nel loro punto comune, è « altresì perpendicolare al piano che le contiene. Ved. P 37 § 1 ». Se una retta è nor- « male ad un piano, questo e quella s'incontreranno di certo; ma la retta non può « giacere nel piano (P 27, 36, 10, 21, 26 § 1 e P 11).

P 19 — Tr. « Non si possono tirare da un punto esterno due diverse perpendico- « lari ad un piano ». — Ovvero: Se A, B, C, D sono punti non complanari, è impossibile « che le DA, DB siano insieme perpendicolari al piano ABC ». — EUCL., lib. 11°, « prp. XIII. [Se queste rette fossero insieme perpendicolari al piano ABC, sarebbero « ancora, sì l'una e sì l'altra, normali alla congiungente A coa B (P 18): il che non « può darsi (P 9). Ved. P 38, 39 § 1.

POSTULATO XVIII.

P 20 — *Qualsiasi sfera s'incontra con ogni retta, che ne contenga il centro.* — Ovver, che è lo stesso: « Se A, B, C sono punti non collineari, esisterà qualche

• punto comune alla sfera di B circa A e alla congiungente A con C. — « Se, essendo A, B, C punti dati e A diverso da B, vi sarà qualche punto diverso da C, che disti da A e da B quanto C; dove esistere un punto che disti da A quanto B sotto condizione, che nessun punto diverso da quello disti da A e da C come quello ».
— Per la qual cosa, avrò riguardo a P 44 § 1:

P 21 — Tr. « Una sfera qualsivoglia e una retta, che ne contenga il centro, se si taglieranno in due punti l'un l'altro distinti e simmetrici rispetto al centro ».

P 22 — Df. Essendo r una retta, il nome generico di « *rotazione intorno ad r* » è per significare la risultante o prodotto dei semigiri intorno a due rette diverse, perpendicolari sì l'una che l'altra alla retta r in un medesimo punto (ma del resto arbitrarie). « Asse di rotazione » è questa retta r . Ved. P 40 § 1 e P 5. Osservate che qualsivoglia rotazione sarà sempre una trasformazione univoca o reciproca dei punti in punti, come il semigiro; e che, dati gli assi u e v dei due semigiri componenti una certa « rotazione intorno ad r », è noto anche l'ordine in cui si succedon quei due semigiri, la rotazione onde si parla n'uscirà pienamente individuata: ma il prodotto di u per v — cioè la rotazione che nasce eseguendo prima u e poi v — differisce per solito dal prodotto di v per u ; le due operazioni composte essendo l'una l'inversa dell'altra, come apparisce dall'egualianza simbolica: $u.v.v.u = u.v.v.v$. $u = u.v.v.u = 1$. Cosicchè la trasformazione inversa d'una rotazione qual si voglia è ancora una rotazione. Ecc. (1).

P 23 — Tr. « Come il semigiro, così anche la rotazione intorno ad un asse coordina sempre a più punti equidistanti da un punto dato a piacere altri punti eziandio equidistanti da un medesimo punto; e cioè rappresenta sfere con sfere in modo, che i centri di sfere omologhe son punti omologhi: onde a punti allineati corrispondono punti allineati, a complanari, complanari; a coppie di rette ortogonali altre coppie di rette eziandio perpendicolari fra loro; ecc. Inoltre la rotazione (come il semigiro) tien fermo ogni punto dell'asse, e converte in sé stessa ogni sfera, che abbia il centro sull'asse ». [Siano come dianzi la retta u e v perpendicolari alla retta r in un medesimo punto A e diverse fra loro. Se d'un punto qualsivoglia M togliamo prima il simmetrico rispetto ad u — che sia p. es. M' — poi di questo il simmetrico rispetto a v — che sia p. es. M'' — sarà precisamente M' l'immagine del punto M in virtù della rotazione $v.u$, prodotto di u per v . Or se più punti E, F, G, ... equidistano dal punto M, similmente i punti E', F', G', ... disteranno egualmente dal punto M' (P 47, 49 § 1); e per la stessa ragione i punti E'', F'', G'', ... dal punto M'': cioè la trasformazione suddetta cangia punto per punto la sfera E_u nella sfera $E''_{u''}$. E di qui — argomentando siccome in P 53 § 1 — facilmente si trae, che a qualunque retta due corrispondono punto per punto una retta, a ciascun piano un piano; al punto medio d'una coppia di punti quali che siano il punto medio della coppia omologa — e p. c. (P 5, 7 ecc.) ad ogni coppia di rette perpendicolari fra loro una coppia di rette eziandio

(1) Vedi la nota IV.

perpendicolare ecc. — Di poi, preso un punto B a piacere sull'asse di rotazione r , il punto B' simmetrico di B rispetto ad α coinciderà col punto B/A, dal momento che $r \perp \alpha$; quindi il punto B/o (ossia B'') col punto B, visto che $r \perp \alpha$; onde il punto B è tautologo. — Infine, qualunque sfera descritta intorno a B come centro dovrà tagliar l'asse r in due punti (P 21): uno di questi sia p. es. C. Ora, per ciò che si è detto, alla sfera C, corrisponde la sfera C''; ed inoltre $B \equiv B''$ o $C = C'$: dunque la sfera C, si converte in se stessa (P 2, 3, 4 § 1); ecc. ecc.].

P 24 — Tr. « Se essendo A, B, C, D quattro punti non complanari, le rette AB, AC sian perpendicolari alla AD e il punto C disti da A quanto B; allora i punti B e C disteranno egualmente da D ». [Ponasi $E \equiv D/A$ ed $F \equiv B/C$. Il punto F è diverso da A, perchè i punti A, B, C non collimano (P 39 § 1, ecc.); e la retta BC perpendicolare alla retta FA (P 3, 5), mentre i punti B o C sono l'un l'altro simmetrici rispetto a questa FA. Inoltre la retta DA, perpendicolare ad ambo le rette AB, AC per l'pt. A, sarà eziandio perpendicolare alla retta FA (P 18, ecc.); e p. cons. i simmetrici del punto D rispetto ad A e rispetto alle AB, FA si confonderanno in un solo e medesimo punto E (P 7). Ne viene che il semigiro intorno ad AB tiene fermo B o conduce D in E, specchiando B, su B₂ (P 52 § 1); laddove il semigiro intorno ad AF porta B in C e ripone E in D, specchiando B, su C. Dunque l'operazione, o trasformazione, composta di questi due semigiri — ossia la risultante, o prodotto, di AB per AF — rappresenta punto per punto la sfera B, sulla sfera C. D'altra parte questa rotazione dee convertire in se stessa la sfera B, (P 22, 23): e però si conclude, che le due sfere B, e C, si confondono in una. Dunque è vero che C appartiene a B₂: c. v. d.].

P 25 — Tr. « Di nuovo essendo A, B, C, D punti non complanari; se avvieni che la retta BA sia perpendicolare ad ambo le rette AC, AD, e la AC perpendicolare alla retta CD, sarà inoltre CD perpendicolare alla retta BC e per cons. normale al piano ABC. Ved. P 18 ». — Questo il teorema delle tre perpendicolari, che si prova come in LEONHARD, *Elementi di Geometria*, lib. 5°, pp. IV. [Ponasi $E \equiv D/C$. Perchè CD \perp CA, i punti D, E saranno egualmente distanti da A (P 3, 5); e perchè la BA è normale a ciascuna delle AC, AD, dunque normale alla AE (P 17), potremo invocare la $\left(\begin{smallmatrix} D, E, B \\ A, C, D \end{smallmatrix} \right)$ P 24, in virtù della quale i punti D ed E saranno eziandio equidistanti da B: onde CD \perp CB (P 3, 5); ecc.].

P 26 — Tr. « Si può sempre da un punto dato esterno ad un piano abbassare una retta perpendicolare al piano ». — EucL., lib. 11°, pp. XI. [Sia il dato punto D. Nel piano dato esistono per certo tre punti non collineari A, B, C (P 27 § 1); o sulla congiungente A con B vi sarà senza fallo anche un punto — sia per es. A — per cui la retta DA riesce normale alla AB (P 9). Di poi sul piano ABC, ma fuor della retta AB, deve esistere un punto — o sia p. es. C — tal che CA \perp AB (P 14). Or se la retta DA risultasse per avventura, normale ad AC, sarebbe essa stessa la perpendicolare al piano dato. Ma se così non è, si può nondimeno trovar nella retta CA qualche punto diverso da A — e sia questo ad es. C — per cui DC \perp CA (P 9); e dopo ciò la P 25 no assicura, che una tal retta DC è senza fallo normale al piano ABC. Ecc.].

P 27 — Tr. « Sempre che gli A, B, C, D siano punti non complanari, esiste almeno una rotazione intorno la retta AB , merco della quale C si rappresenta in un punto del piano ABD . — Ved. P 22 ». [Si può concedere che A sia quel punto di AB , per cui $CA \perp AB$ (P 9); e che AD sia la retta perpendicolare innalzata da A alla AB nel piano ABD (P 11, 14). Questa retta ne incontra per certo la sfera C , (P 20): uno dei punti comuni sia p. es. E . Infine denoti F il punto C/E , per certo diverso da A . Ora, poichè la retta BA è supposta normale a ciascuna delle AC, AE , sarà etiaudio perpendicolare alla congiungente A con F (P 17); anzi i punti C ed E usciranno l'un l'altro simmetrici rispetto a codesta FA : per la qual cosa i due semigiri intorno alle AC, AF , composti fra loro in quest'ordine, produrranno una rotazione intorno ad AB come asse, in virtù della quale C si trasferisce in E , ossia nel piano ABD].

P 28 — Tr. « Da un punto dato in un piano si può sempre innalzare una retta perpendicolare al detto piano ». — *Eucl.*, lib. II^a, prp. XII. [Sia dato il piano σ , e un punto A in esso: si vuol trovare una retta che passi per A e sia perpendicolare a σ . Tolgasi in questo piano un punto B a piacere, purchè diverso da A (Non si può negar l'esistenza di punti distinti nel piano: atteso che, per es., il giudizio « σ è un piano » non differisce dall'altro « esistono tre punti non collineari A, B, C , o $\sigma = ABC$: cfr. P. 26 § 1). Ora è certo che esiste anche un punto escluso da σ (P 16), e p. c. anche un piano — sia p. es. τ — diverso da σ e contenente la retta AB come σ . In quest'altro piano condueasi la retta AD perpendicolare alla AB (P 14); e poi similmente in un piano, il quale contenga etiaudio quella retta AD , ma non si confonda con τ , tirisi AC perpendicolare ad AD : così che la medesima AD sia normale ad ambo le rette AB, AC . Se il punto C e p. c. la retta AC cadessero in σ , sarebbe dunque AD la perpendicolare cercata. Se ciò non è, vi sarà nondimeno — grazie a P 27 — una rotazione intorno ad AB come asse, in virtù della quale C si rappresenta in un punto del piano σ . Allora, dette C' e D' le immagini che una rotazione si fatta coordina ai punti C e D , la retta AD' uscirà perpendicolare così alla retta AB , come alla retta AC' (P 23), e p. c. anche a σ , che le contiene ambedue].

POSTULATO XIX.

P 29 — *Se le sfere d'un punto D intorno a tre punti non collineari s'incontrano ancora in un punto diverso da quello, per es. in E , non possono tagliarsi altrove; ossia non avranno alcun punto a comune diverso da D e da E .* — O, « in altri termini: « Premesso che A, B, C, D, E sono punti, ed A uoi coincide con B , nè D con E ; se il punto E dista da ognuno degli A, B, C quanto D , e se qualche punto diverso da C dista da A e da B quanto C : allora ogni punto, che disti da ognuno degli A, B, C quanto D , coinciderà con D o con E . — Per la qual cosa, se i centri di tre sfere date non siano punti allineati, concluderemo che o non esiste alcun punto comune a tutte e tre quelle sfere, o che in loro intersezione si restringe ad un punto, o consiste in due punti diversi. — Nè sarà fuor di luogo osservare che, mentre il principio XVII (P 16) concede allo

spazio le tre dimensioni (nell'accezione ordinaria), il principio XIX che qui si postula esclude la quarta dimensione.

P 30 — Tr. « E, sotto la stessa Ipt., presi a piacere nel piano ABC tre punti « non collineari H, I, L, la coppia di punti comuni alle sfere D_a, D_i, D_l coinciderà con la coppia D, E ». [Tutte o tre queste sfere passano infatti per D e per E — grazie a $\begin{pmatrix} \pi, D \\ D, M \end{pmatrix}$ P 32 § 1 — ma non hanno altri punti a comune (P 29)].

P 31 — Df. « Essendo A, B, C tre punti non collineari e D un punto esterno « al piano ABC, la frase: '*simmetrico del punto D rispetto al piano ABC*' « vien posta a significare quel punto diverso da D, che giace ad un tempo « sullo tre sfere D_a, D_b, D_c . Ved. P 27 § 1 o P 29 ». — Un tal punto — sia p. es. E — esiste per certo ed ammette una sola determinazione (ivi): esso non è subordinato ai punti A, B, C, ma sì veramente al piano ABC; poichè non cambia luogo, se al posto degli A, B, C togliamo altri punti di questo piano, come H, I, L (P 30). — Ma se, per contrario, D appartiene al piano ABC, chiameremo *simmetrico* del punto D (rispetto al piano ABC) lo stesso punto D. E in ambo i casi il « punto così definito s'indicherà brevemente con ' $D'ABC$ '. — Insomma, dato un piano π o un punto D qualsivoglia, il punto ' D/π ', se D giaccia in π , sarà il punto D stesso; e ove D sia escluso da π , sarà quel punto diverso da D, che — a tenor delle P 27 § 1, P 29 e P 30 — è comune alle sfere di D intorno a tre punti non collineari del piano π (non importa quali); dunque comune a tutte le sfere che passan per D, avendo in π i loro centri. — Emerge di qui che se un punto E è simmetrico di un punto D (rispetto a π) questo è, alla sua volta, il simmetrico del punto E. — « La relazione o corrispondenza espressa dai termini: '*simmetrico rispetto a π* ' e simboleggiata in ' $/\pi$ ' (essendo π un piano) che intercede fra « ciascun punto ed il suo simmetrico, prende i nomi di '*simmetria rispetto a π* ', e di '*specchiamento al piano π* ' (o '*contro π* ') — che in talo ufficio « si chiama piano di simmetria: cioèchè '*simmetria rispetto ad un piano*' « '*simmetria planara*', '*specchiamento*', ecc., sarà il nome generico d'ogni « corrispondenza siffatta ».

Certi eventi, già segnalati a proposito delle simmetrie rispetto ad un punto o rispetto ad un asse (P 45, 49 § 1) ricorrono qui tali e quali. Così la '*simmetria rispetto al piano π* ' sarà una perfetta rappresentazione dello '*spazio*' su sè medesimo; una trasformazione univoca, reciproca o involutoria '*dei punti in punti*' — come qualunque simmetria centrale od assiale. — Si osservi ancora che, tranne i punti del piano π di simmetria (ognun dei quali coincide con la propria immagine), nessun altro punto è tantologo in forza di ' $/\pi$ ': valò a dir che ogni punto esterno a quel piano è diverso dal suo simmetrico. Ecc. (').

P 32 — Tr. « Per mezzo della simmetria rispetto ad un piano, qualsiasi sfera, « il cui centro è nel piano di simmetria, si specchia punto per punto in sè stessa; « e similmente ogni retta perpendicolare a quel piano è tantologa ». [La prima parte consegue immediatamente dalle cose dette (P 29, 30, 31); l'altra deriva dalle P 3,

(') Ved. la nota IV.

5, 18: mercè le quali si prova che, sopra una retta normale al piano di simmetria, due punti simmetrici rispetto al piede equidistano sempre da ciascun punto del piano].

P 33 — Tr. — Da un punto dato in un piano non si potranno elevare due rette diverse, ambedue perpendicolari a quel piano. — EUCL., lib. 11°, prp. XIII. — Orver, che è lo stesso (P 17, 18): « A, B, C siano punti non collineari, ed E, F punti esclusi dal piano ABC: se i punti A, E, F non collineano, sarà impossibile che tanto AE quanto AF siano rette perpendicolari a ciascuna delle AB, AC ». [Se esser può, ciascuna delle due rette AE, AF sia perpendicolare a ciascuna delle AB, AC; e la sfera di B centro A tagli la congiungente A con C nei punti C e C' (P 21). Ne viene che i punti B, C, C', come equidistanti da A, saranno eziandio equidistanti da E — grazie a $\left(\frac{R}{D}\right)$ P 24 — e, per le stesse ragioni, equidistanti altresì da F. Dunque le sfere del punto C intorno ai tre punti non collineari A, E, F si taglierebbero nei punti B e C', diversi l'un l'altro o da C: la qual cosa è in opposizione coi pat. XIX (P 29). Non è dunque possibile ecc., ecc.].

P 34 — Tr. — Se una retta è perpendicolare in un punto a tre altre rette che s'incontrano in esso, queste tre rette saranno in un medesimo piano. — EUCL., lib. 11°, prp. V. — O, in altri termini: A, B, C siano punti non collineari, ed E, F punti esterni al piano ABC, non però allineati con A: se le tre rette AC, AE, AF sono tutte ad un tempo normali alla congiungente A con B, dovranno giacer tutte e tre in un medesimo piano. [Perchè la retta AB è normale ad ambo le rette AC, AE, la perpendicolare elevata dal punto A alla AC nel piano ACE (P 11, 14) — sia p. es. AH — è in pari tempo normale ad AB (P 17). Similmente, per essere AB perpendicolare ad ambo le rette AC, AF, se tiriamo dal punto A la perpendicolare alla AC nel piano ACF — e sia p. es. AK — questa risulta eziandio perpendicolare ad AB. Dunque le rette AH ed AK, in quanto ciascuna è normale a ciascuna delle AB e AC, n'esciranno ambedue perpendicolari al piano ABC (P 17, 18): o però si confonderanno in una sola (P 33): dunque coincideranno anche i piani ACH, ACK. Ma questi non si distinguono dai piani ACE, ACF (P 33 § 1) — i quali perciò si confonderanno in un solo e medesimo piano contenente ad un tempo le rette AC, AE, AF (P 28 § 1): c. v. d.].

P 35 — Df. — Il piano che, a tenere di P 34, contiene tutte le rette perpendicolari a una retta data in un medesimo punto di questa è, per dfin., il 'piano perpendicolare, o normale, alla retta in quel punto'. — Di qui tosto — presenti le P 18, 34 — si deduce, che « Se una retta è perpendicolare ad un piano, questo a sua volta è perpendicolare alla retta: e viceversa ». E, avuto riguardo allo P 15 § 1 e P 9, 14, 16: « Data una retta e dato un punto a piacere, « sia che il punto appartenga alla retta o che ne stia fuori, ci sarà sempre un piano « che passa dal punto, ed è normale alla retta (anzi uno solo) ». — Il semigiogo (P 5) convertito in sè stessa ogni retta o quindi ogni piano perpendicolare all'asse. Ma dalle P 23, 34 emerge altresì che:

P 36 — Tr. — Qual si voglia rotazione converta in sè stesso ogni piano perpendicolare all'asse. E, per mezzo di semigiri o di rotazioni, da rette e piani perpendicolari fra loro non si ricavano che rette e piani perpendicolari. »

P 37 — Tr. « Due piani non coincidenti, che abbiano un punto a comune, s' incontrano lungo una retta. » [Siano ρ e σ i due piani, A il punto comune. In forza di P 23 vi saranno due rette r, s , l'una perpendicolare al piano ρ e l'altra al piano σ nel medesimo punto A: e cioè la r perpendicolare a tutte le rette di ρ che passano per A, e così la s a tutte le rette di σ che passano da A (P 18). E queste due rette r, s sono al certo distinte fra loro; perchè se coincidessero, la P 34 ci obbligherebbe a concludere, che anche i piani ρ e σ coincidono: la qual cosa è contraria all'ipotesi. Esisterà dunque una retta t perpendicolare in A al piano delle r, s (P 37 § 1, P 23). Or questa retta t , in quanto è normale ad r (P 18), sarà costretta a giacere nel piano ρ , che è normale in A alla r (P 34, 35); e in quanto è normale ad s , giacerà similmente nel piano σ : sarà insomma comune ai due piani dati. Nè questi possono incontrarsi altrove: perchè, se avessero qualche altro punto a comune fuor di essa retta t , coinciderebbero (P 37 § 1).]

P 38 — Tr. « Il luogo d'ogni punto equidistante da due punti dati A e B non coincidenti fra loro, è il piano perpendicolare alla congiungente A con B nei suoi punti medio fra questi ('piano polare' di A e B). » Cfr. P 15. — [Pongasi C=AB: e γ sia il piano perpendicolare in C alla AB. Si vuol provare che ciascun punto di γ equidista dai punti A e B; e che viceversa ogni punto, il quale disti egualmente da A e da B, giace in γ . Per dimostrare C equidista da A e da B (P 41 § 1). Ora, se X è un altro punto qualsiasi del piano γ , la retta CX sarà ortogonale alla AB (P 17, 35): onde basta appellarsi a P 7, per concludere che A e B equidistan da X. — Di poi, se si chiama ad es. Y un punto arbitrario fra gli equidistanti da A e da B, sol che diverso da C; la retta CY, essendo normale in C alla AB (P 5), giacerà per intero in γ (P 34, 35): ecc., ecc.]

P 39 — Tr. « Ne viene, che ogni qualvolta due punti siano simmetrici l'uno all'altro rispetto ad un piano (P 31), il loro punto medio giacerà in questo piano, che risulta perpendicolare alla loro congiungente. »

P 40 — Tr. « E le sfere d'un punto arbitrario intorno a più punti non complanari, non hanno altri punti a comune, da quello in fuori. » — Vale a dire che, essendo A, B, C, D punti non complanari ed M un punto arbitrario, le sfere A, B, M, C, D, non s'incontrano fuori di M. [Perchè, se avessero ancor qualche punto a comune diverso da M — e sia per es. N — i punti dati, come equidistanti da M e da N, dovrebbero star tutti e quattro in un piano (P 38). Ecc.]

P 41 — Tr. « Ogni qualvolta due punti equidistano da un terzo punto, eziandio i loro simmetrici rispetto a un piano arbitrario disteranno egualmente dal simmetrico del terzo punto. » — In altri termini: « Per simmetria rispetto ad un piano arbitrario, l'immagine di qualsivoglia sfera è una sfera, e i due centri si corrispondono fra loro ». Cfr. P 52 § 1. [A, B, C siano punti e C disti da A quanto B: si vuol dimostrare che la sfera del punto B/ μ (μ essendo un piano arbitrario) circa il punto A/ μ contiene il punto C/ μ . Pongasi A' = A/ μ , B' = B/ μ , C' = C/ μ ; indi M = A/A', N = B/B', O = C/C'. Si può concedere che A non appartenga a μ (P 32): onde A' è diverso da A, e la retta AA' perpendicolare al piano μ nel punto M (P 39). La sfera B, taglierà quella retta AA' in due punti (P 21), per es. in D ed E: i loro simmetrici rispetto a μ siano D' ed E'. Sapporremo dapprima, che C non

appartenga ad AA' , nè a μ : onde O è diverso da M e C da C' , e la retta MO perpendicolare alla retta AA' e CC' nei punti M ed O (P 39, 18, 6). I punti A e A' — e nello stesso modo anche i punti C e C' , D e D' — saranno dunque simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla retta MO (P 43, 49, 50 § 1, P 5); e per conseq. C' e D' equidistanti da A' , grazie a P 52 § 1. Anzi una tal conclusione regge anche all'ipotesi, che C appartenga a μ ; sebbene allora vien meno la CC' . Di poi supporremo, che C appartenga ad AA' , cioè si confonda con uno dei punti D , E : onde C' si confonderà con D' o con E' . Ma i punti D' ed E' sono ancora i simmetrici dei punti D ed E rispetto al punto M (P 39); e perciò anche rispetto a qualunque retta del piano μ , che passi per M , visto che $AA' \perp \mu$: onde qui per si deduce, che i punti C' e D' equidistan da A' . Ora, tolti B e B' al posto di C e C' , si proverebbe allo stesso modo, che anche B' e D' equidistano sempre da A' . Per la qual cosa avremo ad un tempo, che C' dista da A' quanto D' , e D' da A' quanto B' : dunque C' da A' quanto B' , in virtù del principio V (P 7 § 1).]

P 42 — Tr. Pertanto « Gli stessi fatti, che già segnalammo in P 53 § 1 e « P 23 a proposito di simmetria assiale, e semigiro, e di rotazione (come « altrettanti corollari del principio XV) sussistono ancora nella simmetria pla- « nare, e spezzamento ad un piano. Ciochè, se una retta è normale « ad un piano (P 18, 35), il simile avviene delle loro immagini ».

P 43 — Tr. E resta provato altresì che « Ogni coppia di sfere simmetriche « (l'una dell'altra) rispetto ad un piano, sono anche simmetriche fra loro rispetto a « qualunque retta del piano, che passi dal punto medio dei centri. E, viceversa, due « sfere simmetriche intorno a una retta son sempre simmetriche rispetto al piano che « passa per l'asse, ed è normale alla congiungente i loro centri (ovvero — se le due « sfere coincidono — rispetto a qualunque piano che passi dal comun centro; giusta « le P 50 § 1 e P 32) ».

P 44 — Tr. « E ogni qualvolta due punti equidistano da un terzo punto, anche « i loro equiversi, e simmetrici, rispetto a un punto arbitrario diste- « ranno egualmente dall'equivero, e simmetrico, del terzo punto. Vedi P 45 § 1. « — Vale a dire che: « Se tre punti A , B , C sono tali, che C dista da A quanto B , « e siano presi anche i loro simmetrici A' , B' e C' rispetto ad un punto O qualsi- « voglia; converrà che i due punti B' e C' equidistino dal punto A' ». Insomma « anche l'equinversinne cangia le sfere in sfere e i centri nei centri ». [Si può conoeder che A' è diverso da M (P 46 § 1): onde la retta MA ne taglia in due punti la sfera B , (P 21). Questi sian per es. D ed E ; e siano D' ed E' i simmetrici rispetto ad M . Se C non appartiene alla congiungente A con M , conducasi in M la perpendicolare r al piano ACM (P 28, 33); e se per centro C coincide con D e con E , tolgasi in luogo di r una retta perpendicolare a quella congiungente in M : la qual cosa è certamente possibile, giusta P 14 (e visto che l'esistenza d'un piano, il quale contenga ambo i punti A ed M , non può revocarsi in dubbio, dopo P 15 § 1). Allora i punti A , A' — e nello stesso modo anche i punti C e C' , D e D' — n'esciranno l'un l'altro simmetrici rispetto ad r (P 54 § 1, P 18, 6, 5, ecc.): per la qual cosa, come C e D sono equidistanti da A , così C' e D' equidistanti da A' (P 52 § 1). Ma una conseguenza in tutto simile a questa vien fuori, purchè si tolgano i punti

B e B' al posto di C e C'; vale a dire che anche B' e D' saranno equidistanti da A': onde è forza concluder che i punti B' e C' equidistan da A' (P 7 § 1).]

P 45 — Tr. Quindi è che « Le medesime conseguenze di P 52 § 1 già segnalate in P 53 § 1, P 23 e P 42 a proposito di simmetria assiale o planare e di rotazione intorno ad un asse, valgono ancora per la simmetria contrale, od equi-inversione ». Ad esempio: « Per ognuna delle tre simmetrie l'immagine di una coppia di rette perpendicolari fra loro è sempre una coppia di rette eziandio perpendicolari: e così 'piano e retta' perpendicolari fra loro si riproducono costantemente in 'piano e retta' perpendicolari ».

P 46 — Tr. Inoltre « Ogni coppia di sfere simmetriche (l'una dell'altra) rispetto ad un punto sono simmetriche ancora rispetto a qualunque retta, che passi per detto punto e sia normale alla congiungente i loro centri; e perciò anche rispetto al piano normale a questa congiungente in quel punto (P 43) (ovvero — se le due sfere coincidono — rispetto a qualunque retta o piano che passi dal comun centro: vedi P 46, 50 § 1 P 32). E, viceversa, due sfere simmetriche rispetto ad un asse, sono eziandio simmetriche rispetto al punto medio dei loro centri (il quale appartiene all'asse) ».

P 47 — Tr. « Se due piani si tagliano, e siano tagliati da un terzo e da un quarto piano ambedue perpendicolari alla retta comune ai due primi, la intersezione di questi col terzo piano sarà una coppia di rette simmetriche alla intersezione col quarto. » Vedi P 37. — Ovvero: « Essendo A, B, C, D punti non complanari, e la retta AD perpendicolare al piano ABC; se nei piani ABD, ACD si conducono le rette DE, DF ambedue perpendicolari alla AD, le due coppie di rette (AB, AC), (DE, DF) si corrispondono fra loro per simmetria rispetto ad un asse ». [Posto $O \equiv A \mid D$, condurremo nei piani ABD, ACD le rette OH, OK normali alla AD (P 39 § 1, P 14); e i punti H e K li supporremo equidistanti da O, prendendo ad es. K sulla sfera di H circa il punto O (P 20). Allora, fatto $M \equiv H \mid K$, la simmetria rispetto alla retta MO, perpendicolare ad ambo le rette AD, HK, permuta l'uno coll'altro i punti A e D, come pure H e K: dunque fa corrispondere fra loro i due piani ABD, ACD (che non differiscono dai piani ADH, ADK); mentre la retta DA si converte in sé stessa. Per conseguenza la retta BA — perpendicolare innalzata dal punto A alla AD nel piano ABD — si cangerà in quella retta del piano ACD, che è normale in D alla AD (P 23, 14, 11) ossia nella retta DF: e al modo stesso la AC nella DE: c. v. d.]

P 48 — Tr. « Due rette perpendicolari, sì l'una e sì l'altra, a un medesimo piano, sono esse stesse in un piano, ma non s'incontrano ». [Le rette AC, DG siano due perpendicolari al piano μ innalzate dai punti A e D (non coincidenti fra loro); e nel piano ACD si produca la retta DF perpendicolare alla congiungente A con D; poi nel piano μ le rette AB e DE, l'una e l'altra perpendicolari alla stessa AD. Ora, per esser la AC perpendicolare alla AB, converrà che DF sia ortogonale a DE, grazie al Tr. precedente (e alla P 23). Onde la retta DF sarà in un tempo perpendicolare alle rette AD e DE, e perciò anche al piano μ ; come la retta DG. Dunque le rette DF e DG si confondono in una (P 33); e però le AC e DG sono entrambe nel piano ACD. D'altra parte un punto comune alle rette AC e DG non può esistere, data la P 19.] — Nasce di qui, senz'altro, la prps. seguente:

P 49 — *Tr.* « So da più punti d'una medesima retta giacente in un piano dato
 • s'innalzano rette perpendicolari al piano, tutte queste normali giacciono in un
 • piano. E similmente le perpendicolari abbassate ad un piano dai vari punti d'una
 • medesima retta — la quale non giaccia sul piano, nè sia perpendicolare al piano
 • — sono tutte in un solo e medesimo piano; e i loro piedi si trovano tutti in
 • una medesima retta ».

P 50 — *Tr.* « Qualunque volta un piano contenga una retta perpendicolare ad
 • un altro piano, succederà che ogni retta giacente nel primo, ovvero nel secondo,
 • di questi piani e normale alla loro comune intersezione sarà perpendicolare al se-
 • condo, ed al primo ». [La retta r giaccia nel piano ρ , e sia normale al piano σ
 nel punto A. I due piani si taglieranno per certo lungo una retta t , che passa da
 questo punto (P 18, 37). Siano B un punto arbitrario di t , ed u, v le perpendicolari
 innalzate alla retta t dal punto B nei piani ρ o σ : si proverà che $u \perp \sigma$ e $v \perp \rho$.
 Infatti la perpendicolare elevata in B al piano σ , oltre ad esser normale a t , giace
 nel piano Br , se B è diverso da A (P 48); oppure coincide con r , se $B=A$ (P 33):
 dunque essa giace in ρ (P 37 § 1), e per conseguenza coincide con u (P 11); sicchè
 $u \perp \sigma$. Ma di qui nasce altresì che $u \perp v$: onde v perpendicolare a ciascuna delle
 t, u e per conseguenza al piano ρ].

P 51 — *Def.* « Si dice che un piano ρ è 'perpendicolare, ortogonale, o nor-
 • male ad un altro piano σ lungo una retta t di questo ' allorchè giac-
 • ciono in ρ tutte quante le rette normali a σ nei vari punti di t . Vedi P 49. » —
 Dati a piacere un piano e in questo piano una retta; l'esistenza d'un piano, anzi
 di un solo piano perpendicolare al piano dato lungo la retta data è fuor di qui-
 stione, dopo le P 28, 49. — E intorno alle P 49, 50, 51 si raccoglie i fatti seguenti:

P 52 — *Tr.* « Ogni qualvolta un piano è perpendicolare ad un altro piano,
 • queste è, alla sua volta, perpendicolare al primo ».

P 53 — *Tr.* « E se due piani sono perpendicolari fra loro, qualunque retta tirata
 • in uno di essi normalmento alla comune intersezione sarà perpendicolare all'altro
 • piano. » — Cfr. EUCL., lib. 11°, dfoz. IV.

P 54 *Tr.* « So una retta è normale ad un piano, tutti i piani che la contengono
 • saranno anziandio perpendicolari a quel medesimo piano. » — EUCL., lib. 11°,
 prp. XVIII. — « E se, viceversa, due piani saranno perpendicolari fra loro, qualunque
 retta normale ad uno di essi tirata da un punto arbitrario dell'altro giace tutta in
 quest'altro. » [Invero la detta normale coinciderà con la perpendicolare condotta
 nell'altro piano e dal punto stesso all'intersezione dei piani (P 53, 19, 33)].

P 55 — *Tr.* « Se di due piani che si segnano, ciascuno è perpendicolare ad un
 • terzo piano, anziandio la comune intersezione loro sarà normale a quest'altro piano. »
 — EUCL., lib. 11°, prp. XIX. [Invero, se da un punto comune ai primi due piani
 condurremo la retta perpendicolare al terzo piano, questa dovrà giacere in ognuno di
 quelli (P 54)].

P 56 — *Tr.* « Di due piani perpendicolari fra loro, ciascuno è simmetrico
 • di sè medesimo rispetto all'altro. [Così dalle P 31, 32, 51, 54]. — Reciproca-
 • mente due piani diversi, uno dei quali sia rispecchiato in sè stesso dall'altro, sa-
 • ranno sempre ortogonali ».

§ III.

Punti interni ed esterni a una sfera. Segmenti, raggi, semipiani, angoli, triangoli, ecc.

P 1 — Tr. — Se due sfere hanno un punto a comune, che non sia allineato coi centri, si taglieranno secondo un cerchio, il cui piano è perpendicolare alla congiungente i due centri in un punto, il quale è anche centro del cerchio. Vedi P 40 § 1. — È quanto dire che: « Se A, B, C sono punti non collineari, le due sfere C_1 e C_2 s'incontrano in tutti i punti d'un cerchio, a cui fa da centro il piede della normale calata da C sulla congiungente A con B (nel piano ABC) e da sostegno il piano perpendicolare in detto punto alla stessa AB ». [Sia D quel punto di AB, per cui $CD \perp AB$ (P 9 § 2); indi μ il piano perpendicolare in D alla AB, ed E un punto arbitrario del cerchio d'intersezione fra il detto piano e la sfera C_2 : in primo luogo si proverà che un tal punto è sempre comune ad ambe le sfere C_1 e C_2 . Si può concedere, che il punto E sia diverso da C. Per certo esiste una rotazione intorno ad AB come asse (o un semigiro, se $E = C/AB$), mercè della quale il punto C si trasferisce sul piano ABE (P 27 § 2, ecc.). Ora l'immagine C' del punto C, dovuta a codesta rappresentazione, dovrà stare: 1) nel piano μ — in quanto esso piano vien trasformato punto per punto in sé stesso dalla rotazione (o dal semigiro), grazie a P 28 § 2 — e perciò nella retta DE, comune ai due piani μ e ABE; come ancora 2) in ciascuna delle tre sfere C_1 , C_2 , C_3 — però che ognuna di queste è esistendo convertita in sé stessa. Dunque il punto C' coincide con uno dei punti comuni alla retta DE e alla sfera C_2 ; vale a dire con E o con E/D (P 21 § 2): ma se coincide con E/D, la simmetria rispetto ad AB lo traduce in E, senza distogliertolo dalle due sfere tantologhe C_1 e C_2 (P 50 § 1). Dunque è ferma che il punto E appartenga a queste due sfere. — Appresso, tolgasi un punto F diverso da C e da C/AB, ma come questi comune alle sfere C_1 e C_2 . Un tal punto non giace sul piano ABC (P 47 § 1); ma, se si effettua una rotazione intorno la retta AB per modo, che il punto C si trasporti nel piano ABF, la nuova immagine di C sarà sempre un punto comune alle sfere tantologhe C_1 e C_2 , e però non diverso dall'uno o dall'altro dei punti F, F/AB. Dunque la retta FD, come immagine della CD, sarà anch'essa normale ad AB (P 23 § 2); quindi obbligata a giacere nel piano CDE (P 34, 35 § 2). D'altra parte ogni punto comune alle sfere C_1 e C_2 deve star sulla sfera C_3 (P 16 § 1): sarà dunque comune a queste figure C_3 e CDE. Ecc.]

P 2 — Tr. — Se un medesimo cerchio è comune a più sfere, i centri di queste saranno tutti allineati. [Poniamo che il cerchio C, \cap C_2 della prps. precedente sia contenuto eziandio nella sfera C_3 . Se il centro H di questa non si trovasse in AB, allora il piano ABH taglierebbe quel cerchio in due punti M, N, l'uno diverso dall'altro (P 47 § 1); e per conseguenza le sfere M_1 , M_2 , M_3 — che non differiscono dalle C_1 , C_2 , C_3 (P 10 § 1) — si taglierebbero nei punti M, N: assurdo (P 27 § 1)].

P 3 — Tr. — Se una sfera ed un piano hanno un punto a comune, e non avranno altri punti a comune da quello in fuori, o si taglieranno secondo un cerchio, il

« cui centro è sulla normale al detto piano tirata dal centro della sfera ». — Veda il Lettore.

P 4 — *Df.* « Qualunque siano i punti A e B, questo nome: 'sfera polare, o polosfera, di A e B' — compendiatosi in 'Sfr (A, B)' — denota la sfera di A e B, circumsistente al punto medio di (A, B) come centro. I quali punti A e B si noteranno altresì come 'poli' di essa sfera, o come punti 'diametramente opposti'. Ved. P 41-43 § 1. E similmente la sfera, che passa per un dato cerchio ed ha inoltre lo stesso centro di questo (P 40 § 1) sarà la 'sfera polare', o 'polosfera' del cerchio ». — Osservate che, posto $M \equiv A/B$, si avrà sempre $Sfr (A, B) = Sfr (B, A) = A_M = B_M$; e che, se i punti A e B si confondono in uno, la polosfera di A e B al restringe in quest'unico punto. Etc.

P 5 — *Df.* « Dicesi 'interno alla sfera' il punto medio di qualsiasi coppia di punti esistenti sopra la sfera e diversi l'uno dall'altro ». — Per la qual cosa posto che A, B siano punti, la prps. « X è punto interno alla sfera B, » sarà equivalente al giudizio: « Sopra la sfera B, esistono due punti non coincidenti fra loro, i quali ammettono X per punto medio ». — E al contrario sarà da chiamar 'punto esterno' ogni punto, per cui non esistano sopra la sfera due punti, neppure coincidenti, che lo ammettono qual punto medio ».

P 6 — *Tr.* « Ciascun punto che non appartenga alla sfera dev'essere interno od esterno; nè potrà esser l'uno e l'altro ad un tempo: i punti che giacciono sopra la sfera non sono interni, nè esterni. Il centro della sfera sarà punto interno, se per altro la sfera non si restringa ad un punto; ecc. ecc. ». [Che p. es. ninno punto interno a B, possa giacer su B, (qualunque siano del resto i punti A e B) emerge dalle P 43, 42, 55 § 1. E che A sia interno a B, (quando A è diverso da B) ce lo dice P 44 § 1. Etc.].

P 7 — *Tr.* « Purchè A, B, X siano punti e A diverso da B, dire che 'X è interno a B,' val quanto affermare delle due cose l'una: o che X si confonde col centro A della sfera, o che il piano perpendicolare in X alla congiungente A con X incontra la sfera in qualche punto diverso da X. Perciò si equivalgono ancora i giudizi: 'X è esterno a B,' ed "X non coincide con A, e il piano perpendicolare in X alla congiungente A con X non incontra la sfera". Ved. P 6. [Se X è diverso da A, ma sulla sfera B, esistono punti distinti — per es. B e C — tali che X = B/C, converrà che le AX e BC siano rette perpendicolari fra loro (P 5, § 2) e che il piano perpendicolare in X ad AX contenga BC (P 34, 35 § 2): ecc. — Vedi anche P 3].

P 8 — *Tr.* « E secondo che X è interno, od esterno, a B, ciascun punto della X, sarà interno, od esterno, a B. ». [Invero, preso un punto a piacere sopra la sfera X, purchè diverso da X — dico un punto Y — e visto che il piano polare di (X, Y) passerà sempre da A (P 38 § 2); se a questo piano si specchiano i punti B e C, le loro immagini saranno ancora in B, e simmetriche rispetto ad Y (P 32, 41 § 2): onde Y interno a B, come X. Etc.].

P 9 — *Df.* « I punti d'un piano si dicono 'interni, od esterni ad un cerchio' dato in quel piano, secondo che sono interni od esterni alla polosfera del cerchio. » Ved. P 4, 5. — Pertanto, se un piano contenga i punti A, B, X (A diverso da

B), sarà X interne al cerchio B, di esso piano allora soltanto, che X coincida con A, o che la perpendicolare elevata da X alla congiungente A con X (in quel piano) incontri fuori di X il cerchio (P 20 § 2 e P 3, 7).]

P 10 — *Df.* — Sempre che A, B, X siano punti, si vuol dire che 'X giace fra A e B' qualunque volta X sia allineato con A e B, oltre che interne alla plosfera di A e B. Vedi P 4, 5. E per 'segmento' s'intenderà la figura costituita in tutti quei punti, che giacciono fra due punti dati (estremità del segmento), oppure si confondono con l'uno o l'altro di questi. Il segmento (e intervallo) che ha i punti A e B per estremi, s'indicherà con '|AB|': sicchè |AB| = |BA|. I punti che giacciono fra le due estremità si dicono *interni* al segmento *.

— Per la qual cosa (avuto riguardo alle P 4, 8):

P 11 — *Tr.* — Nè A, nè B — e, se $A=B$, nessun punto — giace fra A e B; ma se A è diverso da B, fra questi due giace almeno il lor punto medio. I punti A e B spettano sempre ad |AB|; ma se $A=B$ (vale a dire se coincidono gli estremi) la figura abbraccia un sol punto. E se A e B sian diversi tra loro, il segmento |AB| non è altro che il luogo di tutti que' punti della congiungente A con B, da ciascuna dei quali innalzando una retta perpendicolare ad AB, questa incontra la plosfera di A e B *.

POSTULATO XX.

P 12 — *Se tre punti A, B, C sono tali, che C giaccia fra A e B, non potrà darsi che B stia fra A e C (nè che A stia fra B e C).* Vale a dire (P 10):
 • Dati sopra una retta tre punti A, B, C l'un l'altro distinti; se il piano perpendicolare alla retta in C incontra la plosfera di A e B, non potrà darsi che il piano perpendicolare in B incontri la plosfera di A e C (nè che il piano perpendicolare in A incontri la plosfera di B e C). Vedi P 35 § 2 e P 4 *. E restituita nella sua forma primitiva (che a mala pena si scorge attraverso la serie delle definizioni precedenti) la stessa propos. suonerebbe così: « Supposto: 1) che A, B, C, D, E sian punti, C diverse da A e da B, e che nessun punto diverso da C disti da A e da B quanto C; 2) che il punto $\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}$ equidisti dai punti $\begin{matrix} A & B \\ A & C \end{matrix}$ e $\begin{matrix} A & B \\ A & C \end{matrix}$, ma
 • nessun punto diverso da $\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}$ disti da ognuna dei punti $\begin{matrix} A & B \\ A & C \end{matrix}$ quanto $\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}$: allora,
 • se esistono due punti, ognuna dei quali disti da A e da B quanto l'altro e da D quanto A, sotto condizione che nessun punto diverso da C disti da ognuno di lor
 • quanto C; non possono esistere due punti, ognuno dei quali disti da B e da C quanto l'altro e da E quanto A, sotto condizione che nessun punto diverso da E disti da ognuno di lor quanto E *. Ma un'altro principio interviene col precedente in quasi tutte le proprietà segmentarie.

POSTULATO XXI.

P 13 — *Dati i punti non collineari A, B, C; qualunque retta del piano ABC, che passi fra i punti A e B, dovrà inoltre passare fra i punti A e C e fra i punti B e C: se però non contenga nessuno degli A, B, C.* — Così anche

il PASCH nel IV Grundsatz circa la "superficie piana" (*). E, sotto veste poco diversa: « Non esiste una retta, che giaccia nel piano di tre punti non collineari, e incontri uno solo dei tre segmenti racchiusi da questi punti ». — I fatti geometrici d'ordine primitivo, che si compendiano in questo principio (trasformati da un lungo processo di definizione) dirgonon palesi nell'enunciato seguente: « Premesso: 1) che A, B, C, D, E, F sonó punti, A diverso da B, e che qualche

punto diverso da C dista da A e da B quanto C; 2) che il punto $\left. \begin{matrix} D \\ E \\ F \end{matrix} \right\}$ equidista

dai punti $\left. \begin{matrix} A \text{ e } B \\ C \text{ e } A \end{matrix} \right\}$, ma nessun punto diverso da $\left. \begin{matrix} D \\ E \\ F \end{matrix} \right\}$ dista da ognuno di questi

$\left. \begin{matrix} A \text{ e } B \\ B \text{ e } C \\ C \text{ e } A \end{matrix} \right\}$ quanto $\left. \begin{matrix} D \\ E \\ F \end{matrix} \right\}$; se in ordine ad altri punti U, V, W succede: 3) che nessun

punto diverso da $\left. \begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix} \right\}$ dista da ognuno dei punti $\left. \begin{matrix} A \text{ e } B \\ B \text{ e } C \\ C \text{ e } A \end{matrix} \right\}$ quanto $\left. \begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix} \right\}$, e nessun punto

diverso da W dista da U e da V quanto W; 4) ch'esistan due punti non coincidenti, ognuno dei quali dista da A e da B quanto l'altro, e da D quanto A, con l'obbligo, che nessun punto diverso da U dista da ognuno di lor quanto U; allora questa condizione 4) o si verifica ancorchè si tolgano i punti B, C, E, V in luogo degli A, B, D, U; o si avvera togliendo per essi ordinatamente C, A, F, W.

P 14 — Tr. « So A, B, C sono punti collineari, non esiste alcun punto, il quale appartenga ad un solo dei tre segmenti |AB|, |BC|, |CA|. » [Si ommette l'ipotesi, che due di que' punti coincidano. — Ora, dato che i punti A, B, C siano al tutto diversi fra loro, proveremo che, se un punto D è interno ad |AB|, ma esterno ad |AC|, dovrà essere interno a |BC|. Toglasi fuor della retta AB un punto E a piacere; e sulla retta BE un punto F, esterno al segmento |BE| — quindi anche alla retta BA — per es. il simmetrico di E rispetto a B (che non appartiene a |BE|, dal momento che B ∉ |EF|; vedi P 45 § 1; P 10, 11, 12). La retta DF, passando fra i punti A e B, senza passar fra B ed E, dovrà contener qualche punto interno ad |AE| (P 13). E, perchè passa fra i punti A ed E, ma non fra C ed A, passerà fra C ed E (P 13). Dunque la stessa DF, in quanto passa fra i punti C ed E, ma non fra B ed E, dovrà passar fra B e C (P 13): che è quanto affermare D ∈ |BC|; nessun altro punto essendo comune alle rette AB, DF].

P 15 — Tr. « E, sotto la stessa lpts., bisognerà che C spetti ad |AB|, o che a B spetti ad |AC|, o che A spetti a |BC|. » — Ossia: « Di tre punti collineari, uno almeno starà nel segmento racchiuso dagli altri due ». [Anche qui supporremo, che i punti A, B, C siano tutti diversi; e mostreremo che dall'ipotesi. 'C non appartiene ad |AB|, nè B ad |AC|', si deduce che 'A è in |BC|'. Siano D un punto fuor della retta AB (P 15 § 1, ecc.), poscia E un punto che giace fra i punti B e D, quale ad es. il punto B'D (P 11): onde B esterno al segmento |DE|, grazie ad $\left(\begin{smallmatrix} D, E \\ A, C \end{smallmatrix} \right)$ P 12. Dunque

(*) Vorles. üb. neuere Geom., Leipzig, 1832 (pag. 21).

la retta CE, passando fra i punti B e D, ma non fra B ed A, passerà fra D ed A (P 13); tagliando ad es. in F il segmento [AD]. E, perchè i punti A, D, E non collimano ed F giace fra A e D, mentre B non è fra D ed E, la retta BF dovrà passar fra i due punti A ed E (P 13); tagliando in G per es. il segmento [AE]. Di poi, visto che G sta fra A ed E, laddove B non è posto fra A e C, bisognerà che F stia fra C ed E (P 13). Onde non resta più che invocare la stessa P 13 in ordine ai punti E, B, G e alla retta DA, per concluder che A sta fra B e C: e v. d.]

P 16 — Tr. — Se A, B, C sono punti non collineari, nessuna retta del piano ABC può passare ad un tempo fra B e C, fra C ed A, e fra A e B. — Ossia: « tre punti A', B', C', interni rispettivamente a [BC], [CA], [AB], non sono mai « allineati ». Cfr. P 13. — [Se A' potesse giacer fra B' e C', la retta BC dovrebbe passare fra i punti A e B', o fra i punti A e C' (P 13); e per conseguenza C giacere fra A e B', ovvero B fra A e C' (P 19 § 1, ecc.): contro P 12. Al modo stesso si prova, che il punto B' non giacerà fra i due punti A' e C', nè C' fra A' e B'. Dunque — grazie a P 15 — i punti A', B' e C' non saranno per certo collineari. — Pasch, loc. cit., pag. 25].

P 17 — Tr. — Dall'ipotesi che A, B, C, D siano punti, C appartenga ad [AB] e D appartenga ad [AC], nasce sempre, che C appartiene a [BD]. — [Basterà dimostrare che ogni qualvolta C giace fra A e B, e D fra A e C, bisognerà che C stia fra B e D: perchè, se due o più di quei punti coincidono, il Tr. censegue ipso facto dalla def. del segmento (P 10). — Sia dunque E un punto arbitrario, purchè esterno alla retta dei quattro punti, ed F un punto obbligato soltanto a giacer fra D ed E: sicchè — per via di $\left(\begin{smallmatrix} D, E, F \\ A, B, C \end{smallmatrix}\right)$ P 12 — fra i punti D ed F non cade alcun punto della congiungente E con C. Or se questa — che non contiene F, nè alcuno dei punti A, B, D — tagliasse per avventura il segmento [FA], dovrebbe tagliare anche [AD], grazie a $\left(\begin{smallmatrix} F, D \\ B, C \end{smallmatrix}\right)$ P 18; per la qual cosa C cadrebbe fra i punti A e D; contro l'ipotesi fatta, che D appartenga ad [AC] (P 12). Ma, se la retta CE non passa fra i punti A ed F, dovrà senza fallo incontrare [FB], grazie a $\left(\begin{smallmatrix} F \\ C \end{smallmatrix}\right)$ P 13, o visto che C per ipsi. giace fra A e B. Passerà dunque fra i punti F e B; e, non avendo alcun punto a comune con [FD], lo converrà di passare fra i punti B e D, in virtù di $\left(\begin{smallmatrix} E, D \\ A, C \end{smallmatrix}\right)$ P 13: ecc.] — Di qui nasce senz'altro — avuto riguardo a P 12 — che:

P 18 — Tr. — Se un punto C giace fra i punti A e B, e un punto D fra gli A e C, non può D giacer fra B e C; e, in altri termini: se C giace fra A e B, i segmenti [AC] e [CB] non avranno alcun punto a comune, da C in fuori (!) — Per

(?) Nella mia Memoria citata in Prefazione stavano in luogo del pett. XX le due P 14 e P 15, che son relazioni fra quattro punti, laddove P 12 è una relazione fra tre. La semplificazione che ora introduce proviene dai « *Grundlagen der Geometrie* » di D. HILBERT (2^a ediz. § 3; Leipzig, 1903): dove il fatto che « Di tre punti collineari, uno ed uno solo giace fra gli altri due » è tolto a principio fondamentale di « Anordnung », insieme col noto assioma del PASCH

• la qual cosa: Non esiste alcun punto interno comune a tutti e tre gli intervalli, che hanno gli estremi in tre punti dati a piacere *. [Uso inverso dei punti dati (se questi son tutti diversi e collineari fra loro) giace fra gli altri due (P 15). Se no, basta appellarsi a P 10, 11].

P 19 — Tr. • Se tre punti A, B, C sono tali, che C stia nel segmento |AB|, • tutto il segmento |AC| — e al modo stesso anche l'altro |BC| — sarà contenuto in |AB|; e ciascun punto interno ad |AC| o a |BC| sarà interno ad |AB|. — Insieme: • Ciascun punto di un qualsivoglia segmento determina coi punti estremi due nuovi segmenti, che son contenuti nel primo *. [Se $A = B$, non occorron parole. — Possiamo che A e B non coincidano. Allora ogni punto di |AC|, diverso da A e da C, sarà interno all'uno o all'altro dei due segmenti |AB|, |BC| (P 14). Ma non può essere interno a |BC| (P 18): dunque è interno ad |AB|.]

P 20 — Tr. • E, nella stessa Ipta., |AB| si compone di tutti i punti, che spettano indistintamente ad |AC| o a |BC|, e di questi soli *. — Cioè: • Qualsivoglia segmento è la somma logica dei due segmenti intercelti fra un suo punto arbitrario e le due estremità *. [Invero qualunque punto di |AB| dovrà stare in uno almeno dei due segmenti |AC| e |BC| (P 14). Il resto è già detto in P 19].

P 21 — Tr. • Qualsivoglia segmento contiene tutto il segmento racchiuso da • due de' suoi punti *. — E cioè dall'ipta. 'A, B, C, D sono punti, e C, D ∈ |AB|', si deduce che |CD| ⊂ |AB|. [Per certo D appartiene ad |AC|, o a |BC| (P 20): dunque |CD| sarà contenuto da |AC| o da |BC|, e per conseg. da |AB| (P 19)].

P 22 — Tr. • Se i punti A, B, C non collineano, e siano presi i punti A' e B' • rispettivamente in |BC| e |CA|, dovrà esistere un punto comune ai segmenti |AA'| e |BB'| *. [Suppongo A' diverso da B e da C, come pure B' diverso da C e da A. Il principio XXI — ove si enunci nei punti B, C, B' e per la retta AA' — ne assicura, che questa retta incontrerà |BB'| in un punto, da poi che A non può stare fra B' e C a motivo di P 12. E per le stesse ragioni la retta BB' dovrà tagliare il segmento |AA'| in un punto. Ma questi due punti d'intersezione coincidono; poichè ciascuna è comune alle rette AA' e BB', che non si confondon fra loro — visto che all'una appartiene il punto B, escluso dall'altra]. — Nel modo stesso si proverebbe il teor.:

P 23 — Tr. • Ed ogni retta, la quale unisca B con qualche punto dell'intervalle |AA'|, incontra sempre |CA| *.

P 24 — Tr. • Dati i punti non collineari A, B, C e un quarto punto D, altro • che A e B; se avviene che la retta DA passi fra B e C, e la retta DB fra C ed A, bisognerà che la retta DC passi fra A e B *. [Per certo i punti C e D non coincidono, poichè la retta DA non contiene C. Ora le AD e BD taglieranno ad es. nei punti A' e B' i segmenti |BC| e |CA|: per la qual cosa D sarà interno al

(ch'è per noi la P 13) e con vari altri patiti. I quali tutti venner poi riprodotti nella 'Rational Geometry' di G. B. HALPERN (New-York, 1904). Ma osservate che delle due parti in cui ci può cadere il detto principio (vedi le nostre P 12 e P 15) una è conseguenza dell'altra e del citato assioma di M. PASCH.

segmento $[AA']$ (P 22); laddove C non può stare fra A' e B (P 12). Di qui la tesi in virtù di $\left(\begin{smallmatrix} A', B \\ n, C \end{smallmatrix}\right)$ P 13].

P 25 — Tr. « Purchè A, B siano punti, le sfere di B centro A e di A centro B s'incontrano ». — Questa è insomma la prova, ch'esiste un triangolo equilatero avente un dato segmento $[AB]$ come lato. Eucl., lib. 1°, prp. 1. [Si può conceder che i punti A e B non coincidano (P 9 § 1). Posto $M \equiv A/B, A' \equiv A/B$, siamo certi che M appartiene ad $[AB]$ e B ad $[AA']$ (P 10, 11), e per conseg. M ad $[AA']$ (P 19); anzi M interno a questo segmento. Dunque il piano perpendicolare in M alla retta AB taglierà in qualche punto diverso da M la polosfera di A e A' (P 10), cioè la sfera A_0 ; e se indichiamo con X un tal punto, la retta MX è normale ad AB (P 35 § 2). Pertanto la simmetria rispetto alla retta MX rappresenta A con B e B con A (P 5, 6 § 2), permutando la sfera A_0 con la sfera B_0 (P 52 § 1): dunque X , in quanto appartiene ad A_0 e di più corrisponde a sè stesso (P 49 § 1), dovrà essere un punto comune ad ambedue quelle sfere.]

P 26 — Tr. « Se A, B, C sono punti non collineari e le rette AB, AC perpendicolari fra loro, si deduce che A sarà interno alla sfera C_0 , e C esterno alla sfera A_0 . Vedi P 5 ». [Già si sa che la sfera C_0 e la congiungente A con B si taglieranno in due punti — sia per es. D, E — diversi l'un l'altro e da C (P 21 § 2, ecc.). Circa la seconda parte del Tr., posto $F \equiv A/B$ ed $M \equiv C/D$, basterà dimostrare, che uno dei punti D ed E giace fuor del segmento $[FA]$: visto che D si baratta con C per mezzo del semigiorno intorno alla retta BM , il quale converte in sè stessa la sfera A_0 (P 50 § 1, P 3 § 2, ecc.). Ora il punto F , al pari di A , sarà interno alla sfera D_0 — poichè si scambia con A per effetto d'inversione rispetto a B , ferma stante D_0 — e però l'uno e l'altro staranno fra i punti D ed E (P 10): ond'è uopo che il punto F cada fra A ed E o fra A e D (P 20). Ma nell'un caso E , nell'altro D , sarà esterno ad $[AF]$ (P 12)]. — E di qui tosto, richiamando le P 8, 10 § 2:

P 27 — Tr. « Se una retta e una sfera si toccano — cioè s'incontrano, una sola volta — tutti i punti di quella saranno esterni alla sfera, tranne uno solo (il punto di contatto) ».

P 28 — Tr. « E se A, B, C sono punti, ed A interno alla sfera C_0 , converrà che C sia esterno alla sfera A_0 . » [Se A è diverso da B , sulla sfera C_0 vi sarà qualche punto D , per cui la retta DA sia normale ad AB (P 6, 7): un tal punto sarà esterno ad A_0 (P 26) e con esso anche il punto C (P 8)].

P 29 — Df. « Se A, B sono punti non coincidenti, l'*ombra* di B da A — o *prolungamento* di $[AB]$ oltre B' — designa la classe dei punti, per ognuno dei quali — sia per es. X — il punto B appartiene al segmento $[AX]$. — La *semiretta* A per B' — o *raggio A verso B'* — sarà invece la classe dei punti che stanno in $[AB]$, o nel prolungamento di $[AB]$ oltre B . Il punto A è *l'origine* di questa figura: la quale — come retta terminata in A — s'indicherà con $[AB]$. — Osservate che il punto B e il simmetrico di A rispetto a B speltano sempre all'ombra di B da A ; come i punti A e B/A all'ombra di A da B (P 10, 11, ecc.): e che la simmetria non distrugge la qualità di *segmento* e

di 'raggio'; vale a dire che un raggio $|AB|$ o un segmento $|AB|$ dati a piacere son corarianti di A e B nei rispetti del semigioco, dell'equiversione e dello specchiamento ad un piano. Vedi P 52, 53 § 1, P 42, 44 § 2; ecc.

P 30 — Tr. — Sotto la stessa ipotesi, non esiste alcun punto comune ai due prolungamenti di $|AB|$; nè alcun punto, che giaccia ad un tempo in $|AB|$ e nel prolungamento oltre B , se si eccettua B : ma il segmento $|AB|$ co' suoi prolungamenti 'ombra di A da B ' e 'ombra di B da A ' riproducono tutta la retta. — L'ultima cosa è apertamente significata in P 15 — presente la P 29. — Che nasca contraddizione al supporre " X appartiene all'ombra di A da B e all'ombra di B da A " — vale a dire (P 29) " $A \in |BX|$ insieme con $B \in |AX|$ " — emerge dalle P 11, 12. — E che un punto Z di $|AB|$ coincida con B , qualunque volta $B \in |AZ|$, è altresì detto in P 12; se si considera, che per ipotesi non si può avere $B \in |AZ|$ con $Z = A$, e che le due condizioni $Z \in |AB|$ $B \in |AZ|$ si escluderanno a vicenda, se Z è diverso da B (P 12).]

P 31 — Tr. — Ed $|AB|$ sarà il luogo dei punti, che sono comuni ai due raggi $|AB|$ e $|BA|$.

P 32 Tr. — E le ombre di B da A e di A da B sono raggi: anzi, posto $C = A/B$, l'ombra di B da A non differisce dal raggio $|BC|$. [I punti B e C sono comuni alle due figure (P 29); e, per qualunque altro punto X , la condizione $B \in |AX|$ insieme con la $B \in |AC|$ ne escludono che B possa star fra C ed X , visto la $\left(\begin{smallmatrix} C, X \\ B, C \end{smallmatrix}\right)$ P 18: onde X appartiene a $|BC|$, o C a $|BX|$ (P 15); vale a dire $X \in |BC|$ (P 29), qualunque volta è nell'ombra di B da A . — Viceversa da ognuna delle condizioni ' $X \in |BC|$ ', ' $C \in |BX|$ ' si deduce che B non può star fra C ed X (P 15): onde $B \in |AX|$ — posto che $B \in |AC|$ per ipotesi o data la $\left(\begin{smallmatrix} X \\ B \end{smallmatrix}\right)$ P 15 — sempre che X appartenga a $|BC|$.]

P 33 — Tr. — E, se C, D sono punti arbitrari del raggio A verso B , converrà che D appartenga ad $|AC|$, o C ad $|AD|$; ma, quando siano diversi da A , questo punto non appartiene a $|CD|$. L'ipotesi, è che gli A, B, C, D soddisfacciano le relazioni: " $C \in |AB|$, ovvero $B \in |AC|$ " e " $D \in |AB|$, ovvero $B \in |AD|$ " (P 29); la qual cosa equivale a supporre: " $C \in |AB|$ con $D \in |AB|$, ovvero $C \in |AB|$ con $B \in |AD|$, ovvero $B \in |AC|$ con $D \in |AB|$, ovvero $B \in |AC|$ con $B \in |AD|$ ". — Se uno dei punti C, D si confonde con A o con B , la Ts. è vera senz'altro (P 11, 29, ecc.): si può dunque concedere che sian diversi da A e da B . Allora dal primo membro $C, D \in |AB|$ dell'ipotesi, nasce che A non appartiene a $|BC|$, nè a $|BD|$ (P 12, ecc.), dunque nemmeno a $|CD|$ (P 14): per la qual cosa, in virtù di P 15, bisognerà che D appartenga ad $|AC|$, o C ad $|AD|$, che è la Ts. Dal secondo membro ' $C \in |AB|$ e $B \in |AD|$ ' si deduce, a tenor di $\left(\begin{smallmatrix} D, B \\ B, C \end{smallmatrix}\right)$ P 19, che C appartiene ad $|AD|$. Nel modo stesso vediamo, che il terzo membro dell'ipotesi, coinvolge la relazione $D \in |AC|$. Infine dall'ultima parte ' $B \in |AC|$ con $B \in |AD|$ ' nasce tosto, come della prima, che A non può stare in $|BC|$, nè in $|BD|$ (P 12), quindi nemmeno in $|CD|$ (P 14): ecc., ecc.].

P 34 — Tr. • Inoltre coincideranno i due raggi $|AB|$ e $|AC|$, qualunque volta C « sia un punto di $|AB|$, purchè diverso da A ». [La dimostr. suddetta prova senz'altro, che in quest'ipotesi, ciascun punto D, il quale appartenga ad $|AB|$, giace ancora in $|AC|$. Ma la stessa ipotesi, 'C e $|AB|$ ovvero B e $|AC|$ ' non si altera, perchè si scambino fra loro i punti B e C: dunque ogni punto di $|AC|$ dovrà appartenere ad $|AB|$.]

P 35 — Tr. • E il segmento $|CD|$, che ha per estremi due punti arbitrari del « raggio $|AB|$, giacerà tutto in questo ». [Trascurando il supporre, che C o D si confonda con A, si avrà per dimostrato, che $|AB| = |AC| = |AD|$ (P 34); e d'altra parte $|CD|$ sarà contenuto in $|AC|$ o in $|AD|$, secondo che D e $|AC|$ o che C e $|AD|$ (P 19, 33)].

P 36 — Tr. • Qualunque retta è divisa da un suo punto arbitrario in due « raggi, simmetrici l'uno dell'altro rispetto a quel punto, che ne è l'origine. « Questi raggi non hanno altri punti a comune (dall'origine in fuori); ma, presi insieme, riproducono la retta ». [Chi ben guardi, il Tr. è già stabilito in P 30, 32, 34: ma si può confermare esplicitamente così. Dica A il punto dato; e togliasi un punto B a piacere sopra la retta data, purchè diverso da A (P 26 § 1). Indi il punto B' = B/A (P 44, 45 § 1): le due semirette in questione non sempre $|AB|$ e $|AB'|$. Anzi tutto l'ombra di A da B si confonde col raggio $|AB'|$ (P 32), mentre il raggio $|AB|$ consiste in $|AB|$ e nell'ombra di B da A (P 29): per la qual cosa i due raggi assommano la retta, senz'aver punti a comune da A in fuori (P 30). Appresso se il punto B cangia luogo, passando ad es. in C, i nuovi raggi $|AC|$, $|AC'|$ non differiscono dai primi, tutt'al più commutati fra loro (P 34), dacchè il nuovo punto C cadrà necessariamente in $|AB|$ o in $|AB'|$. Infine se si considera, che la simmetria rispetto ad A (per via di P 45 § 1 e P 29) trasforma l'uno nell'altro i segmenti $|AB|$ e $|AB'|$ e fa corrispondere la condizione B' e $|AX'|$ alla B e $|AX|$ — dove X denoti un punto arbitrario di $|AB|$, e sia fatto $X' = X/A$ — concluderemo che i raggi $|AB|$ e $|AB'|$ sono l'uno l'altro simmetrici rispetto ad A]. — Ne viene, ad es., che qualunque sfera descritta intorno ad A come centro taglierà sempre in un punto ciascuno dei raggi complementari $|AB|$ e $|AB'|$ (P 21 § 2); ossia:

P 37 — Tr. • Un raggio dato a piacere taglia in un punto qualunque sfera, « che abbia per centro l'origine; ma non esistono sopra un medesimo raggio due « punti diversi e ad egual distanza dall'origine ».

P 38 — Df. • E (nell'ipotesi di P 34) acquistano valore preciso le locuzioni: i « punti C e D son situati 'dalla stessa banda di A', — oppure 'da bande « opposte di A'; mercè le quali (dato che nè C, nè D si confonda con A) si « esprime che i punti C e D son tutti e due in uno solo di que' due raggi complementari $|AB|$ e $|AB'|$ — oppure che l'un punto giace in un raggio e l'altro nell'altro. Ved. P 36 ». — Uno di questi fatti deve sempre aver luogo, ma tutti due in una volta non si offeranno giammai. — Insomma le semirette, in cui resta divisa la retta mercè d'un suo punto A, si chiamano ancora 'le due bande di A sopra la retta'.

P 39 — Df. • Data una retta r e un punto esterno P, l'«ombra di r da P» « non è altro che il luogo di tutti que' punti X per cui si verifica, che $|PX|$ incontri « r. — Il «semipiano r per P' o «da r verso P', simboleggiato in $|r P'|$, è

• la classe dei punti, ognuno dei quali — sia p. es. Y — giace sul piano Pr in maniera che la retta r non incontri il segmento PY , o lo incontri tutt'al più in Y .
— L'una e l'altra figura contengono la propria origine r , e son covarianti di r e P rispetto alla simmetria. Ecc.

P 40 — Tr. • Sotto la stessa lpt., e detto P' il simmetrico del punto P rispetto alla retta r , l'ombra di r da P' si confonde col semipiano « da r verso P' ». Cfr. P 32. [Per certo r passa fra P e P' (P 54 § 1 e P 11). Ora, se un punto X appartiene all'ombra di r da P , ma non alla retta r — sicchè questa ne incontri il segmento PX fuor degli estremi (P 39), passando cioè fra P ed X — non potrà darsi che r passi fra P' ed X : vietandolo P 13 o P 16, secondo che X appartiene o non appartiene alla retta che unisce P con P' : onde X sarà un punto del semipiano $|rP'$ (P 39). — Viceversa, da $Y \in |rP' \sim r$ (cioè dal supporre che r non incontri il segmento PY), tutto che Y giaccia nel piano Pr , ma non sulla r si deduce che r taglia il segmento PY —, in virtù di P 14 o P 13, secondo che Y giace o non giace su PP' — onde risulta che questo punto appartiene anche all'ombra di r da P'].

P 41 — • Inoltre coincidono i due semipiani $|rP, rQ$, qualunque volta Q sia « un punto del semipiano $|rP$, ma non appartenga ad r ». Cfr. P 34. [Si dimostra come il precedente in virtù degli stessi principi — e cioè da P 13, 14, 16, 18, 39].

P 42 — Tr. • E nessun punto esterno alla retta r è comune al due semipiani $|rP, |rP'$: ma ciascun punto del piano Pr deve stare nell'uno o nell'altro. Cfr. P 30. [Preso un punto a piacere nel semipiano $|rP$, ma non sulla retta r — e sia p. es. X — dal fatto che r passa fra P e P' , senza passar fra P ed X (P 54 § 1, P 10, 11, 39), si deduce che r passa eziandio fra P' ed X (P 13, 14); e p. cons. che X non è un punto del semipiano $|rP'$ (P 39). — Di poi, se indiciamo con Y un punto arbitrario del piano Pr , e supponiamo che Y non appartenga al semipiano da r verso P , quindi nemmeno ad r , bisognerà che la retta r tagli il segmento PY in un punto interno (P 39, 10). Non può dunque la r , che passa fra P e P' , incontrare il segmento PY (P 16, 18): onde Y giace nel semipiano $|rP'$].

P 43 — Tr. • E, dato che il punto Q appartenga al semipiano $|rP$, tutto il segmento PQ giacerà in $|rP$. Auzi ogni raggio, che abbia origine in r e passi da « un punto del semipiano $|rP$, sarà contenuto in questo (perchè l'origine e il punto « non sian tutt'uno). Cfr. P 35. [Così dalle P 19, 33, 35, 39, 41].

P 44 — Tr. • Se in un piano è tracciata una retta a piacere, il piano sarà « diviso da questa in due semipiani, che non hanno alcun punto a comune fuor « della retta, ma presi insieme, riproducono il piano. E questi due semipiani si scambieranno fra loro (ribaltandosi l'uno sull'altro) per mezzo del semigiro intorno « alla retta ». — Sicchè, detti π ed r il piano e la retta, il prodotto logico dei due semipiani sarà uguale ad r , la somma logica a π . Cfr. P 36. [Il Tr. deriva principalmente da P 27, 47, 49 § 1 e P 39-42].

P 45 — Df. • Sotto la stessa lpt., due punti del piano π , esclusi i punti di r , si dicono giacere « dalla stessa banda di $r' \), o « da bande opposte di $r' \), « secondo che stanno insieme, o non stanno, in un solo dei due semipiani, che « la retta determina sul piano dato: vale a dire secondo che r non taglia, o taglia « il segmento che unisce i due punti. Ved. P 36, 44 ».$$

P 46 — *Tr.* • Dati i punti non collineari A, B, C , qualunque piano che passi • fra i punti A e B (vale a dire ogni piano, che incontri il segmento $|AB|$, ma non • contenga A nè B) passa eziandio fra B e C , o ver passerà fra C ed A , o passerà • per C ; non però fra B e C e fra C ed A in una volta *. — Cfr. P 13, 16. [Qualunque piano, che seghi la retta AB , taglia lungo una retta il piano ABC (P 37, § 2): e però si ritorna senz'altro alle P 13, 16].

Procedon di qui le nozioni di 'semispazio' e delle due 'bande' d'un piano*: le quali oramai, sulle tracce di P 39-45, si possono dire acquisite. Come un piano per mezzo d'una sua retta, e una retta da un punto che le appartenga (P 36, 44), così anche lo spazio, o classe dei punti, è diviso da un piano dato a piacere in due ben distinte figure, cui il piano stesso è confine. Queste sono — se il piano abbia nome π , ed A, A' denotino due punti esterni e simmetrici rispetto ad esso (P 16, 29, 31, § 2) — il 'semispazio π per A' ', o 'da π verso A' ', e il 'semispazio π per A ', o 'da π verso A ': che, se ci piace, potremo anche distinguere coi nomi di 'ombra di π da A' ' e 'ombra di π da A '. La prima di queste figure (ad es.) non è altro che il luogo dei punti X , per cui succede che $|AX|$ non incontra π , o lo incontra in X : ovvero succede, che $|A'X|$ sempre incontra π (il che torna lo stesso). Cfr. P. 29, 39.

P 47 — *Df.* • Ogni qualvolta A, B, C sono punti non collineari, per 'angolo • convesso dei raggi $|AB|$ e $|AC|$ ' s'intenderà la figura costituita in A e in tutti • que' punti diversi da A , per ognuno dei quali — sia p. es. X — la semiretta • A per X incontra il segmento $|BC|$: la qual figura verrà eziandio designata con • \hat{A}, BC . Invece l' 'angolo concavo dei raggi $|AB|$ e $|AC|$ ' — significato da • \hat{A}, BC — sarà il luogo di A e di tutti que' punti diversi da A , ognuno dei quali • — sia p. es. Y — giace ancora nel piano ABC , ma per modo che il raggio • $|AY|$ non incontra il segmento $|BC|$, fuor che tutt'al più negli estremi. — 'Vertice dell'angolo' il punto A , 'lati dell'angolo' le due semirette, o raggi, • $|AB|, |AC|$; 'interni all'angolo' tutti i punti dell'angolo, che sono esclusi dai lati. • 'Retto' ogni angolo piano convesso, i cui lati sian raggi perpendicolari fra • loro *. — È manifesto senz'altro, che gli angoli \hat{A}, BC e \hat{A}, CB si confondon tra loro (P 10), e così gli \hat{A}, BC e \hat{A}, CB ; e che, se un punto D sarà interno, tutto il raggio $|AD|$ sarà contenuto dall'angolo. Ecc.

P 48 — *Tr.* • Se A, B, C sono punti non collineari, e D, E punti dati a piacere sui lati $|AB|, |AC|$, purchè diversi da A , l'angolo \hat{A}, DE coinciderà con l'angolo \hat{A}, BC : e similmente $\hat{A}, DE = \hat{A}, BC$. E, dato inoltre un punto F , interno ad • \hat{A}, BC , l'angolo \hat{A}, BF sarà contenuto dall'angolo \hat{A}, BC : anzi ogni punto di \hat{A}, BC • dovrà stare in uno degli angoli \hat{A}, BF ed \hat{A}, CF *. [Superfluo il dire, che i punti A, D, E non collineano (P 19, 21 § 1, ecc.). Una retta che passi per A e incontri $|BC|$, ovvero incontri $|DE|$, taglierà necessariamente $|BE|$ (P 13, ecc); atteso che A sarà esterno così a $|CE|$, che a $|BD|$ (P 38): e, per le stesse ragioni, dovrà tagliar nell'un caso $|DE|$, nell'altro $|BC|$. Ma la stessa P 13, invocata per le due terne di punti (B, F, H) ed (E, F, K) — dove H, F, K denotano i punti d'incontro di quella retta coi tre segmenti $|BC|, |BE|, |DE|$ — ci dice ancora che i punti H e K staranno ambedue sopra il raggio $|AF|$. E inverso la retta CA , non passando fra i punti B

— sia per es. D — tutto che scelto ad arbitrio, avrà per immagine un punto D' comune alle sfere D_1, D_2, D_3 : per la qual cosa D' coinciderà con D, e ver con il simmetrico di questo punto rispetto al piano ABC (P 29-31 § 2). Ma nel primo caso ogni punto coinciderà con la propria immagine (P 40 § 2) — perchè le sfere intorno al punto D saranno anch'esse tautologhe — e nell'altro caso ogni punto esterno a quel piano è diverso dal punto omologo. E così. — E s'esse altri dimostrano il seguente:

P 24 — Tr. « Una similitudine, la quale consenta più punti tautologici non è complanari, si confonde con l'identità ».

P 25 — Tr. « Dati i punti non collineari A, B, C, qualsivoglia rotazione \mathfrak{R} intorno alla retta BC si può sempre aver componendo lo speccchiamento al piano ABC con lo speccchiamento al piano polare dei punti A ed $\mathfrak{R}A$. Ved. P 38 § 2 e P 4, 5, 8 ». [Si può conceder che AB sia perpendicolare a BC. — Or se \mathfrak{R} fosse precisamente il semigiorno intorno alla retta BC (P 7), basterebbe appellarsi a P 8. Poniamo dunque che la rotazione onde si parla sia diversa dal semigiorno; e subordini ai punti (distinti) A_1 ed A i punti A ed A' : di guisa che $\mathfrak{R}A_1 = A$ e $\mathfrak{R}A = A'$. I punti A e A' giacciono insieme sulle due sfere tautologhe A_1 e A_2 (P 23 § 2), e il loro punto medio — che chiameremo D — non appartiene all'asse (P 10): onde la retta AA' è normale ad ambo le rette DB e DC (P 3, 5 § 2) e i punti A e A' sono l'un l'altro simmetrici rispetto al piano BCD. Osservate che — posto D, A_1/A — sarà D_1 fuor di BC come D; e i punti D_1 e D saranno omologhi secondo \mathfrak{R} (P 23 § 2) e p. c. diversi fra loro (P 8): onde A_1 è diversa da A' ; e i punti A_1, A ed A' in quanto appartengono tutti alla sfera A_1 , non collineano (P 4, 5 § 1). Inoltre la retta BC, supposta normale a AA' , è altresì perpendicolare a ciascuna delle BA_1, BA' (P 23 § 2). D'altra parte \mathfrak{R} subordina la polarsfera dei punti A, A' a quella dei punti A, A: questo due sfere sono dunque simmetriche l'una dell'altra rispetto ad un piano, che passa per l'asse BC (P 11); e p. c. simmetrici l'una dell'altro, rispetto al medesimo piano, anche i centri D_1 e D, come pure i due cerchi A_1 , e A_2 , che il piano A_1AA' perpendicolare in B a BC (P 34, 35 § 2) determina su quelle sfere. Detti cerchi si taglieranno in due punti distinti A ed E, poi che A non spetta a DD_1 (P 47 § 1); e il piano polare di questi punti A ed E conterrà D, e D (P 38 § 2), ma non la retta BC, visto che i punti B, C, D e D, non sono complanari (P 10). Dunque è forza che ognuno dei punti A ed E sia convertito in sé stesso dalla simmetria che scambia fra loro i due cerchi: onde ABC sarà il piano di simmetria; e p. c. anche i punti A, ed A' s'esciranno simmetrici l'uno dell'altro rispetto al piano ABC. Di qui si deduce, indicando con \mathfrak{L} ed \mathfrak{M} gli speccchiamenti nei piani BCA, BCD: $\mathfrak{R}A = A' = \mathfrak{M}\mathfrak{L}A$ $\mathfrak{R}A_1 = A = \mathfrak{M}\mathfrak{L}A_1$, $\mathfrak{R}B = B = \mathfrak{M}\mathfrak{L}B$, $\mathfrak{R}C = C = \mathfrak{M}\mathfrak{L}C$. Pertanto la similitudine $\mathfrak{M}\mathfrak{L}\mathfrak{R}$ converte in sé stesso ciascuno dei punti non complanari A, A_1, B, C ; dunque (P 24) $\mathfrak{M}\mathfrak{L}\mathfrak{R} = 1$, e p. c. $\mathfrak{M}\mathfrak{L} = \mathfrak{R}$: c. v. d.] — Con questo ragionamento abbiamo altresì dimostrato che:

P 26 — Tr. « Sotto le stesse lpt., la rotazione \mathfrak{R} risulta ancora dallo speccchiamento al piano BCD, seguito dallo speccchiamento al piano A'BC; ovvero dallo

o 'periferia', del triangolo. 'Interno' al triangolo qualunque punto di essa figura, il quale non stia sul contorno; 'esterno' al triangolo qualunque punto del piano ABC, che sia escluso dalla figura. Angoli (interni) del triangolo saranno i tre angoli convessi A. BC, B. CA, C. AB. Etc.

P 52 — Tr. « Sotto la stessa Ipta., il triangolo [ABC] non è altro che l'intersezione di due qualunque degli angoli \hat{A} . BC, B. CA, C. AB, e di tutti e tre i semipiani AB per C, BC per A, CA per B. Vedi P 2 § 1. » — Vale a dire: $[ABC] = \hat{A}.BC \cap \hat{B}.CA = \hat{B}.CA \cap \hat{C}.AB = \hat{C}.AB \cap \hat{A}.BC = \hat{A}.BC \cap \hat{B}.CA \cap \hat{C}.AB = [AB.C \cap BC.A \cap CA.B]$. [Così da P 51, in virtù delle P 22, 23, 29, 39, 47, 49, ecc.] Ma dalle P 49, 52 e 43 emerge altresì la seguente:

P 53 — Tr. « Il segmento che ha per estremi due punti presi a piacere (sia l'uno che l'altro) in un dato angolo convesso, o in un dato triangolo giace tutto nell'angolo, ovvero nel triangolo. » — In altri termini sono figure 'convesse' il triangolo e l'angolo piano convesso — come il semipiano, il raggio e il segmento (P 43, 35, 21).

P 54 — Tr. « Se due segmenti coincidono, avranno i medesimi estremi; e se due raggi coincidono, avranno la stessa origine. » [Sian per es. A e B, C e D gli estremi dei due segmenti eguali; e ci sia consentito il supporre A diverse da B, e per conseg. anche C diverso da D. Il punto B, dovendo star con A in [CD] (P 2 § 1 e P 11), cadrà senza fallo in [CA], e in [AD] (P 20); per la qual cosa uno almeno dei punti C e D non giacerà fra A e B (P 12, 11). Ma i punti C e D alla lor volta son contenuti da [AB] per Ipta.: quindi, ove C non cada fra i punti A e B, sarà giuoco forza ch'esso coincida con A o con B (P 10, 11): o il simile dicasi in ordine al punto D. Si conclude che uno almeno dei punti C, D coinciderà con uno degli A e B. Il resto al Lettore. — Di poi, se due raggi AB e AB coincideranno fra loro, senz'aver la medesima origine — essendo B un loro punto comune diverso dalle origini A e A' — il punto A' dovrebbe giacere in AB e il punto A in A'B: sicchè n'uscirebber verificate ad un tempo le due condizioni "A' s'AB| ovvero B s'AA'" o "A s'AB| ovvero B s'AA'" (P 20), il cui prodotto (finchè i punti A, A', B son distinti) equivale a "B s'AA'" (P 12). Senonchè in questa Ipta., nessun punto X diverso dagli A, A', B e soggetto alla condizione A s'BX| giacerebbe in [AB], nè B potrebbe stare in AX| (P 12): vale a dire un tal punto (qual'è ad es. B/A) sarebbe escluso dal raggio [AB, quantunque appartenga ad A'B, dal momento che B s'AX| in virtù di $\begin{pmatrix} A', X \\ B, C \end{pmatrix}$ P 14.] — Per questa via si conferma altresì cho

P 55 — Tr. « Due angoli (convessi o concavi), ovvero due triangoli non possono coincidere, fin tanto che i lati dell'uno sian diversi da quelli dell'altro ».

§ IV.

Teoremi sulle rotazioni. I postulati d'Euclide e d'Archimede. Similitudine ed isomeria. Congruenza dei segmenti e degli angoli.

P 1 — Df. « Similitudine è il nome generico d'ogni trasformazione unitaria e reciproca dei punti in punti, che a qualsivoglia coppia di punti equidistanti da un terzo punto coordina sempre una coppia di punti, eziandio equidistanti dal trasformato del terzo ». — O, sotto altra veste: « Similitudine vuol dire: rappresentazione dello spazio su sè medesimo, che alle sfere descritte intorno a un punto arbitrario (qual centro) fa corrispondere le sfere descritte intorno all'immagine di questo punto. E due figure si dicono *simili*, qualunque volta esista una similitudine, che muti l'una nell'altra punto per punto: cioè quando sian ferme embleghe d'una qualche similitudine ».

È palese l'analogia che intercede fra codesta dfnz. e quella di *collineazione*, derivata al v. STAUDT⁽¹⁾. Mentre « collineazione » significa trasformazione, che non ha virtù di distruggere l'allineamento fra punti (cioè converte ogni terna di punti allineati in una terna di punti allineati); « similitudine » è invece la trasformazione, che non ha poter di sopprimere l'*equidistanza* fra punti (Insieme che muta qualunque terna isoscele in un'altra terna isoscele).

P 2 — Tr. « Le simmetrie rispetto ad un punto, a una retta, ad un piano (equiversione, semigiro, specchiamento) sono similitudini: ved. P 52 § 1 e P 41. 44 § 2. La risultante o prodotto di due similitudini è di nuovo una similitudine. Qualesivoglia rotazione è una similitudine: ved. P 22, 23 § 2. La trasformazione inversa d'una similitudine è ancora una similitudine. L'identità è una similitudine ».

P 3 — Tr. « Qualesivoglia similitudine rappresenta i punti collineari i punti collineari, anzi converte ogni retta in una retta ed ogni piano in un piano. Al punto medio coordina sempre il punto medio e al simmetrico il simmetrico: a rette e piani perpendicolari fra loro altre rette e piani eziandio perpendicolari fra loro; a ciascun segmento un segmento, a ciascun raggio un raggio, a ciascun triangolo un triangolo: ecc. » [Si dimostra tal quale P 53 § 1 — presenti le dfnz. di retta, piano, segmento, raggio, ecc.].

P 4 — Tr. « La risultante o prodotto delle simmetrie rispetto a due piani che si tagliano è una rotazione intorno alla retta comune a quei piani ». (Siano α e β i due piani, r la retta d'intersezione, u e v le due tracce d'un piano perpendicolare ad r sopra i due piani α e β (P 35, 37 § 2); e, preso un punto P ad arbitrio, pongasi $P_1 = P/\alpha$, $P' = P/\beta$: onde P' sarà l'immagine di P attraverso

(¹) Loc. cit., pag.

la similitudine β/α , prodotto dagli specchiamenti α/β (P 31 § 2 e P 2). Si dimostra, che anche la rotazione v/u (P 22 § 2) intorno alla retta r (normale ad ambo le rette u, v) traduce P in P' . Invero questa rotazione — al pari di α/β e di β/α — converte in sè stesso ogni punto di r e ogni piano perpendicolare ad r (P 23, 36, 54, 56 § 2): in particolare anche il piano che passa per P , ed è normale ad r . D'altra parte le due perpendicolari innalzate a questo piano dai punti P e P_1 sono rette simmetriche (l'una dell'altra) non solo rispetto ad α (P 45 § 2, ecc.), ma sì ancora rispetto ad β ; in quanto le loro tracce Q e Q_1 sul piano delle u e v siano punti simmetrici rispetto ad α , e perciò anche simmetrici rispetto ad β (P 39, 18, 7 § 2). Nel modo stesso si corrispondono fra loro secondo v le due perpendicolari P_1Q_1 e $P'Q'$ innalzate al piano π dai punti P_1 e P' . Sono dunque omologhe, tanto per β/α quanto per v/u , le rette PQ e $P'Q'$: dunque omologhi ancora i due punti P e P' . — Con questo (pur che s'intendano date ad arbitrio le rette u, v , anzi che i piani α e β) abbiamo altresì dimostrato che:

P 5 — Tr. — Una rotazione, tutto che data ad arbitrio, è sempre uguale al « prodotto degli specchiamenti a due piani, che si tagliano secondo l'asse di quella ».

— Inoltre:

P 6 — Tr. — Componendo, nell'ordine che più ci piace, le simmetrie rispetto a due piani perpendicolari fra loro, si ottiene per risultante il semigiro intorno alla retta d'intersezione. [Invero — dato alle lettere il medesimo significato che hanno in P 4, ma supposti α e β perpendicolari fra loro (P 31 § 2) — le due rette normali al piano β che passano da P e P_1 , una delle quali è la PP_1 , si scambieranno fra loro, sia per effetto della trasformazione β/α (o della α/β), come ancora in virtù del semigiro intorno ad r : atteso che i loro piedi son punti l'un l'altro simmetrici rispetto ad α (P 42 § 2) e perciò anche simmetrici rispetto ad r , e il piano β è simmetrico di sè medesimo (P 50 § 1, ecc.). Per egual modo le rette normali al piano α che passano da P e P' , una delle quali è la PP_1 , si corrispondono fra loro secondo β/α (o α/β) ed r : onde i punti P e P' si scambieranno fra loro in virtù di β/α (o di α/β), e n'usciranno simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad r]. — Di qui nasce, avuto riguardo a P 28 § 2 e P 4, che:

P 7 — Tr. — Il prodotto del semigiro intorno a due rette perpendicolari fra loro non differisce dal semigiro intorno alla retta perpendicolare ad entrambe nel loro punto comune. Per la qual cosa la simmetria rispetto ad un asse è una « rotazione ». Ved. P 22 § 2.

P 8 — Tr. — Non può darsi che una rotazione converta in sè stesso un punto escluso dall'asse. [Poniamo che la rotazione v/u — dove le u, v siano rette perpendicolari a qualche altra retta r in un medesimo punto e diverse fra loro, ma del resto arbitrarie — ammetta un punto tautologo E non giacente sull'asse. Allora, detti α e β i due piani che l'asse r determina con quelle rette u e v , si deduce che la rotazione v/u equivale al prodotto β/α (P 5): per la qual cosa i due punti E ed E/α saranno anche simmetrici l'uno dell'altro rispetto a β , visto che $\beta/\alpha/\alpha/E = E$. Ma il punto E non può star su ciascuno dei piani α e β , diversi fra loro in Ipts. (P 18 § 2); onde i punti E ed E/α non potranno coincidere (P 31 § 2). Dunque una medesima retta (la congiungente i due punti) sarebbe normale ad ambo i piani α e β (P 39 § 1): assurdo (P 35, 9 § 2)].

P 9 — Tr. « Se A, B, C, D sono punti non complanari, esiste sempre una rotazione intorno alla retta AB , mercè della quale il semipiano $|AB, C$ si rappresenta col semipiano $|AB, D$. Ved. P 2, 3 ». [Basta qui richiamare la dimostrazione di P 27 § 2, con l'avvertenza di scegliere per punto E quel punto, dove la sfera C , taglia il raggio $|AD$ (P 37 § 3)].

P 10 — Tr. « Acciò che una rotazione equivalga ad un semigirotto, basterà che si converta in sè medesimo un piano passante per l'asse. Ved. P 7 ». [Sia Σ una rotazione intorno alla retta r ; e poniamo che un certo piano π passante per r si rappresenti: in sè stesso. Da un punto A , preso ad arbitrio fuor di quel piano, conducasi il piano α perpendicolare ad r ; e dicasi A' il punto ΣA , che deve giacere in α — poichè questo piano è tautologo secondo Σ (P 36 § 2). Oltre la retta r sono tautologhe ancora la retta s , traccia di π in α , e quindi la retta t normale ad ambedue le r, s nel loro punto comune (traccia di r su α) che chiameremo M . Ora, designando per H e H' i piedi delle normali abbassate alla retta s dai punti A ed A' — onde $H' = \Sigma H$ (P 36, 54 § 2) — bisognerà che la sfera H_M contenga H' , in quanto i suoi punti si corrispondon fra loro (P 23 § 2); per la qual cosa $M = H|H'$, o le rette $AH, A'H'$ n'esciranno simmetriche l'una dell'altra rispetto al punto M . Nel modo stesso le rette AK e $A'K'$ — perpendicolari a t nei punti K e K' — saranno simmetriche rispetto ad M . Dunque simmetrici rispetto ad M , e per conseguenza rispetto ad r (P 7 § 2), anche i punti A e A' . Ecc.].

P 11 — Tr. « Due sfere omologhe secondo una rotazione arbitraria sono sempre simmetriche fra loro, e l'asse di rotazione è nel piano di simmetria ». [Se una delle due sfere abbia il centro sull'asse di rotazione, la Ts è vera senz'altro, in virtù di P 23, 32 § 2 e P 46, 50 § 1. — Se ciò non è, sian per es. B e B' i centri delle due sfere (che si corrispondon secondo una rotazione Σ intorno alla retta r) M il lor punto medio, ed A un punto dell'asse, diverso per altro da M : la prima delle due sfere taglia il raggio $|BA$ in un punto, che chiameremo C (P 37 § 3). La sfera di B , centro A , come tautologa in Σ , passa altresì per B' : d'onde la retta MA risulta perpendicolare alla retta BB' , e il punto B' simmetrico del punto B rispetto ad AM (P 3, 5 § 2). Inoltre il punto ΣC conven che appartenga a C_1 , perchè anche questa è sfera tautologa in Σ ; o una ragione consimile — detto δ per brevità il semigirotto intorno ad AM — vuole che il punto δC appartenga a C_1 . Ora queste similitudini Σ e δ converton, sì l'una che l'altra, il raggio $|BA$ nel raggio $|B'A$ (P 3); dunque i punti ΣC e δC giaceranno ambedue sulla sfera C_1 , e sul raggio $|B'A$; e però si confonderanno in un solo o medesimo punto C' (P 37 § 3). Ne viene che δ , al par di Σ , rappresenta la sfera C_1 sulla sfera C' : ecc. Quanto al resto, ved. P 43 § 2].

POSTULATO XXII.

P 12 — Per tre punti non collineari passa almeno una sfera. — Vale a dire « Se, dati i punti A, B, C e supposto A diverso da B , vi sarà qualche punto s diverso da C , che disti da A e da B quanto C ; dovrà esistere ancor qualche punto, da cui disti ciascuno degli A e B quanto C ». E, considerando che il piede della

normale abbassata dal centro di quella sfera sul piano dei tre punti dati equidista da ognuno di essi (P 3 § 3); « Tre punti, che non sian per diritto fra loro, giacciono sempre in un cerchio. Ved. P 40 § 1 ». — È questo il noto principio, che W. BOLZAI (*) proponeva alla vece del patl. d'EUCLIDE sulle parallele.

P 13 — Tr. « Ogni qualvolta due sfere sono simmetriche ad una medesima sfera, saranno anche simmetriche fra loro ». [Una medesima sfera γ , specchiandosi ai piani μ e ν , produce le sfere α e β come immagini (P 41 § 2): si vuol provare che anche queste α , β saranno simmetriche l'una dell'altra. Grazie alle P 43, 46 § 2 le altre ipis. (di simmetria centrale od assiale) rivengono a quella che or si considera. Supporremo in primo luogo, che i centri A, B, C delle sfere non siano punti allineati. Allora, grazie al principio XXII (P 12) esisterà sul piano ABC qualche punto, che dista egualmente da ognuno degli A, B, C: e un tal punto deve giacere su tutti e due i piani μ e ν , perpendicolari alle coppie (A, C) e (B, C) nei loro punti medi (P 38, 39 § 2). Nè potrà darsi che questi due piani coincidano, finto che i punti A, B, C non collineano: dunque si taglieranno lungo una retta r (P 37 § 2); e le simmetrie rispetto a μ e ν , per via delle quali si passa da α a γ o da γ a β , daranno come prodotto una rotazione intorno alla retta r (P 4), che traduce direttamente α in β . Pertanto queste due sfere α , β saranno simmetriche l'una dell'altra rispetto ad un asse normale alla coppia (A, B) nel suo punto medio (P 11) — e perciò anche rispetto a questo punto medio o rispetto al piano che in esso è normale alla congiungente A con B (P 43, 46 § 2). — Di poi si suppongano collineari, ma al tutto distinti fra loro, i tre punti A, B, C; e tolgasi una quarta sfera δ , che sia simmetrica a γ come α o β , ma non abbia il centro in AB. Ora, essendo le sfere α o δ simmetriche d'una medesima sfera γ o i centri A, D, C non collineari, bisognerà che α o δ siano simmetriche fra loro, per ciò che abbiamo dimostrato. Nel modo stesso anche β o δ : e però le α e β sono simmetriche d'una medesima sfera, il cui centro non appartiene ad AB: ecc., ecc. (*).]

P 14 — Tr. « Par che A, B, C siano punti e C giaccia fra A e B, il punto A, C deve star fra i due punti A ed A/B ». — O, in altri termini, concessa l'ordinaria defn. della somma di due segmenti, com'è stabilita più tardi (§ 5): « Se un segmento è minore di un altro, anche il doppio del primo è minore del doppio dell'altro ». [Posto $A' = A/B$, $C' = C/B$, $M = C/A'$, e visto che i punti A, B, C son distinti; che C appartiene ad |AB| e B ad |AA'|, onde $B, C \in |AA'|$ mentre $B \sim |AC|$ (P 11, 19, 12 § 3); si deduce che $B \in |CA'|$ (P 20 § 3) o $|BA'| \subset |CA'|$. Dunque il punto C/B, in quanto appartiene a |BA'| (per simmetria rispetto a B: ved. P 2, 3) giacerà nel segmento |CA'|. Or se $D = C'/M$, la polosfera dei punti C e D — ch'è simmetrica (rispetto ad M) alla polosfera di A' e C' — sarà dunque simmetrica alla polosfera di A e C (P 13): per la qual cosa, ove D non coincida

(*) « Kurzer Grundriss eines Verzeichnisses... », 1831, pag. 46.

(*) È ben noto che questo teorema può reggersi ancora senza dipendere dal patl. d'EUCLIDE: ma qui si è preferito dedurlo dal XXII, anziché da qualche altro principio; dopo aver senza frutto cercato di stabilirlo su i soli principi I-XXI. Or chi togliesse questa P 13 come primitiva, non avrebbe mai da ricorrere al patl. XXII per tutto ciò che contemplano i primi cinque §§. e potrebbe così ritardarne l'introduzione sino al § 6°.

con A , convien che C coincida col punto $A|D$ (atteso che allora C sarà il solo punto comune a quelle due sfere simmetriche, e per conseguenza autosimmetrico). Ma il punto D , obbligato come C a giacer nel segmento CA' (ch'è rispecchiato in sé stesso dall'inquadratura M) non può coincider con A , esterno al detto segmento (P 12 § 3) in quanto si sa che C e fra i punti A e A' . Dunque $D = A/C$; dunque il punto A/C sta nel segmento CA' , e per cons. in AA' : visto che $CA' \supset AA'$, dal momento che $C \in AA'$. — La prps. che segue ha ufficio di Lemma rispetto a P 21.

P 15 — Tr. « Se due segmenti giacciono l'uno nell'altro senza coincidere, non saranno simmetrici fra loro ». [I punti C e D , l'un l'altro distinti, giacciono insieme dentro il segmento AB , ed uno almeno — per esempio C — è diverso dai punti estremi A e B : si dimostra, che nè le coppie (A, B) e (C, D) , nè le (A, B) e (D, C) , saranno simmetriche fra loro, l'altro, perchè fossero simmetriche, dovrebbero coincidere i punti medi di (A, C) e (B, D) , ovvero i punti medi di (A, D) e (B, C) , secondo che ad A corrisponde C , o D . In primo luogo suppongasi $D = A$ (e $C \sim B$). Allora l'ipta. $A|C = B|D$ verrà esclusa senz'altro dall'unicità del simmetrico di A rispetto ad A, C (P 44 § 1); e l'altra ipta. $A|D = B|C$ dall'essere A punto esterno a BC (P 12 § 3). Così ancor si ragiona, se $D = B$. — Pesca ognuno dei punti C e D sia diverso da A e B . Si può conceder che D si trovi in AC , poi che giace necessariamente in AC o in BC (P 20 § 3). Allora l'ipta. $A|C = B|D$ viene esclusa da ciò, che il simmetrico del punto D rispetto ad $A|C$ dovrebbe anch'esso giacere in AC , laddove B non vi giace (P 12 § 3). E l'altra ipta. $A|D = B|C$ si rimuove osservando, che i due segmenti AD e BC non avranno punti in comune; poi che non ne hanno i segmenti AC e BC , tranne il punto C , esterno ad AD (P 18, 19, 12 § 3).

P 16 — Tr. « Ogni qual volta A o A_1 sono punti non coincidenti; o si pone, qualunque sia l'indice i (pur che maggiore di 1):

$$A_i = A_{i-1}/A_{i-1}, A_2 = A;$$

« allora ogni punto di questa classe è diverso da tutti gli altri, e giace nel raggio AA_1 ; anzi i punti $A_2, A_1, A_1, \dots, A_1$ spetteranno al segmento AA_1 ; inoltre i segmenti A_2A_1 o $A_{i-1}A_i$ sono sempre simmetrici fra loro ». [Considerando che il Tr. è vero circa i primi tre punti A_2, A_1, A_2 (P 44, 45 § 1; P 10, 11, 29 § 3; P 2, 3), basterà dimostrar, che se è vero in ordine ai punti A_2, A_1, \dots, A_i , deve sussistere ancora nei punti $A_2, A_1, \dots, A_i, A_{i+1}$. Or dalla ipt. $A_{i-1} \in AA_1 \in A \sim A_i$ segue tosto, in virtù di P 12 § 3, che $A_i \sim A|AA_{i-1}$: per la qual cosa — visto che il punto A_i spetterà in ogni modo al segmento $A_{i-1}A_{i+1}$ (P 11 § 3) — se ne deduce attraverso $\left(\begin{smallmatrix} A_2, A_{i-1} & A_{i-1} \\ A, B & C \end{smallmatrix} \right)$ P 14, che $A_i \in A|A_{i+1}$. Dunque $A|A_i \supset A|A_{i+1}$ (P 19 § 3) ed $A_{i+1} \sim A$, anzi $A_{i+1} \sim A|A_i$ (P 11, 12 § 3); atteso che il punto A_i è diverso così dall'estremo A_2 (per il supposto induttivo) come dall'estremo A_{i-1} (P 45, 8 § 1). Ne viene che i punti $A_2, A_1, \dots, A_i, A_{i+1}$ giacciono tutti in $A|A_{i+1}$ e son tutti diversi fra loro: da poi che gli A_2, A_1, \dots, A_i già stanno in $A|A_i$ o son tutti diversi fra loro in ipt. Ma il fatto che $A_i \in A|A_{i+1}$ si può interpretare dicendo che A_{i+1} è nell'ombra di

A_2 da A (P 29 § 3), dunque nel raggio $|AA_1|$ (ivi). Infine la polosfera dei punti A_{2-1}, A_1 (P 4 § 3) sarà simmetrica tanto alla polosfera dei punti A_2, A_1 (in virtù del supposto induttivo o delle P 1-3), quanto alla sfera polare dei punti A_2, A_{1-1} ; dunque (P 13) simmetrica ancora la polosfera di (A_2, A_1) e di (A_2, A_{1-1}) , l'una all'altra; e per cons. simmetrici l'uno dell'altro i segmenti $|A_2 A_1|$ e $|A_2 A_{1-1}|$ (P 11 § 3).

P. 17 — Tr. « E se inoltre facciamo $\alpha_i = A_2, \alpha_2 = A_1, \dots$ e in generale $\alpha_i = A_{i-1}$ (qualunque sia l'indice i , par che maggiore di 1) si dimostra che $\alpha_i = A_{i-1}$. [Anche qui basterà dimostrare che il Tr. supposto vero per $i = 1, 2, \dots, l$, sussiste ancora per $i = l + 1$. Invero, la simmetria rispetto al punto α_i , scambiando fra loro i punti A_2 e α_{i+1} , coordina al punto $A_2 \alpha_i$, ossia α_{i+1} , il punto α_i / α_{i+1} . Ma, come i punti A_2, α_{i+1} sono l'una l'altro simmetrici rispetto al punto A_{i+1} — in quanto A_{i+1} e A_{i+1} non differiscono da A_{i+1} e α_i , grazie all'ipotesi fatta — così anche i punti A_{i+1} e A_{i+1} risp. al punto A_{i+1} : atteso che, se si tolgono i punti A_{i+1} e A_{i+1} in luogo dei punti A_2 e A_1 , gli $A_{i+1}, A_{i+1}, \dots, A_{i+1}, A_{i+1}, \dots, A_{i+1}$ prendono ordinatamente le veci dei punti $A_2, A_1, \dots, A_{i+1}, A_{i+1}, \dots, A_{i+1}$; e nel modo stesso anche i punti A_{i+1} e A_{i+1} rispetto al punto A_{i+1} ; in virtù della sostituzione $\begin{pmatrix} A_2, A_1 \\ A_{i+1}, A_{i+1} \end{pmatrix}$, per cui gli $A_{i+1}, A_{i+1}, A_{i+1}$ diventano A_2, A_{i+1}, A_{i+1} . Dunque il simmetrico di α_{i+1} rispetto a α_i non è altro che il punto A_{i+1} , sicché $\alpha_i / \alpha_{i+1} = A_{i+1}$; e al tempo stesso $\alpha_i / A_{i+1} = A_{i+1}$. Dunque $\alpha_{i+1} = A_{i+1}$: c. v. d.]

Se non piace il nome di « scala dei punti A_2, A_1 » (della quale A_1 sarebbe l'«*ultimo gradino*») per la serie dei punti $A_2, A_1, A_2, A_1, \dots$; questi si possono chiamare, occorrendo, i punti «*ultrasimmetrici* di A_2 rispetto ad A_1 » (a cominciare dal simmetrico A_1 di guisa che il punto A_1 sarebbe l'«*(i-1)-mo ultrasimmetrico* di A_2 rispetto ad A_1 »); come non disconviene l'attributo d'«*ipersimmetrici*» ai punti $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ testè definiti. Ma se questi nomi si eviteranno qui senza sforzo, altro è dei seguenti, che hanno ufficio non trascurabile in molte dimostraz.¹

P 18 — Df. « Premesso che A o B sono punti; se facciamo una volta per sempre: $\delta_2 = B, \delta_1 = A | B, \delta_2 = A | \delta_1, \delta_3 = A | \delta_2, \dots$, e in generale, qualunque sia il numero intero e positivo i :

$$\delta_i = A | \delta_{i-1},$$

« δ_i si dirà l'«*i-esimo punto ipermedio* di A, B verso A ». Di poi, se si pone una volta per sempre: $\delta_{i,2} = A, \delta_{i,1} = \delta_i, \delta_{i,2} = \delta_i / \delta_{i,1}, \delta_{i,3} = \delta_{i,2} / \delta_{i,1}, \delta_{i,4} = \delta_{i,3} / \delta_{i,2}, \dots$ e in generale, qualunque sia il numero intero i , pur che maggiore di 1:

$$\delta_{i,l} = \delta_{i,l-1} / \delta_{i,l-2},$$

« tutti i punti di questa classe son per chiamarsi «*medio-simmetrici* della « coppia (A, B) ». — Insomma il punto $\delta_{i,l}$, qui definito verrebbe ad esser l'«*(l-1)-simo degli ultrasimmetrici* di A rispetto all'«*i-simo punto ipermedio* di A, B verso A »: se non che, per $i = 1$, il punto $\delta_{i,l}$ non è altro che l'«*ipermedio* δ_i ». — Osservato che tutti i punti ipermedi di (A, B) sposteranno al

segmento $[AB]$ e tutti i medio-simmetrici al raggio $[AB]$ (P 11, 19, 29 § 3; P 16 e Induct.); e come, in virtù di P 3 e Induct.: « Qualsivoglia similitudine, che rappresenti in sé stesso ciascuno dei punti A e B, dovrà convertire in « stesso ogni singolo punto d_{i-1} ; e così tutti i punti medio-simmetrici della coppia (A, B) n'esciranno tantologi ».

POSTULATO XXIII.

P 19 — Siano A_0 e A_1 punti non coincidenti, P un punto arbitrario del raggio $[A_0 A_1]$; se, qualunque sia l'indice i , pur che maggiore di 1, si chiami sempre A_i l'equiverso del punto A_{i-2} rispetto al punto A_{i-1} ; allora, per qualche valore n dell'indice i , bisognerà che il segmento $[A_{n-1} A_n]$ contenga il punto P. — Questo il nettissimo principio, che va sotto il nome di postulato d'ΑΝΕΜΜΗΚΕ (Assioma V, de sphaera et cylindro). Ved. P 16.

P 20 — Tr. « Se un punto A_i giace fra i punti A e B, vi sarà sempre un « punto ipermedio di A, B verso A, che cade fra i punti A e A_i . Ved. P 18 ». [Dal momento che, posto $A_0 = A$, il punto B — ossia d_0 — per un certo valore n dell'indice i appartiene al segmento $[A_{n-1} A_n]$ (P 19), esisterà senza fallo una coppia di punti A_{i-1} e A_i che nell'intervallo $[A_{i-1} A_i]$ racchiuderà qualche punto ipermedio di A, B verso A: per es. il punto d_k . Ora si scelga un numero intero k in maniera che $i < 2^k$: onde i punti A_{i-1} e A_i sono interni al segmento $[A A_{i-1}]$ (P 16), ch'è quanto dire interni ad $[A \alpha_k]$ (P 17). Ne viene — grazie a P 14 e avuto riguardo a P 12 § 3 — che il punto d_{k-1} giacerà fra i due punti A e α_{k-1} , e così il punto d_{k-2} fra gli A e α_{k-2} , ... il punto d_{k-2-1} fra A e α_1 , e infine il punto d_{k-2} fra A ed A_1].

P 21 — Tr. « Dato che A e B siano punti diversi l'uno dall'altro; fra due « punti arbitrari, purchè distinti, del raggio A verso B, deve sempre giacer qualche « punto medio-simmetrico della coppia (A, B). [Ved. P 18 ». Siano P e Q quei due punti. Si può conceder, che P giaccia in $[AQ]$, ma senza coincider con A (P 3 § 3); poi che l'ipotesi $P = A$ si è già contemplata in P 20. Telgasi un punto C a piacere fra i punti P e Q; o si chiami D quel punto di $[AC]$, per cui la coppia (A, D) è simmetrica della (C, P): vale a dir l'equiverso di P rispetto ad A/C (P 44, 45 § 1). Fra i punti A e D cadrà in ogni modo anche un punto ipermedio di A, B verso A (P 20): tal sia p. es. A_1 . Allora se si pone $A_0 = A$, $A_2 = A_1/A_1$, ... e in generale $A_i = A_{i-1}/A_{i-1}$; nella serie dei punti $A_0, A_1, \dots, A_1, \dots$ ce ne saranno due consecutivi — per es. A_{n-1} e A_n — che racchiudono il punto P, in maniera che $P \in [A_{n-1} A_n]$ (P 19). E si può anche conceder che P sia diverso dal secondo estremo A_n : perchè, se non fosse, nulla c'impedirebbe di togliere i punti A_n e A_{n+1} in luogo dei punti A_{n-1} e A_n , senza modificare in nessun altro modo i ragionamenti che seguono. Or, se $A_n = C$, la T_n è vera senz'altro, poi che A_n è un punto medio-simmetrico della coppia (A, B) (P 18): supponiamo pertanto $A_n \sim C$. Proveremo che il punto A_n deve cader fra C e P: il Tr. sarà così stabilito, poi che $[CP] \supset [PQ]$ (P 19 § 3). E a tal uopo (in virtù di P 15 § 3) basterà dimostrar che P non può giacer fra A_n e C, nè C fra A_n e P.

1) Il punto P, se è possibile, cada fra A_n e C. Per l'ipta. P è diverso da A e da C (P 11 § 3), ma giace fra questi due punti in virtù di $\left(\begin{smallmatrix} Q, A, P, C \\ A, B, D, D \end{smallmatrix} \right)$ P 17 § 3.

Dunque il punto A_n giacerebbe ad un tempo nel raggio AB (P 18) — che non differisce da AP (P 34 § 3) — e nell'ombra di P da C, vale a dire nel raggio PA (P 29, 32, 34 § 3): dunque starebbe in AP (P 31 § 3), senza coincider con A e con P. D'altra parte, se consideriamo che il punto A_{n-1} appartiene al segmento $[AA_n]$ (P 16) e il punto P al segmento $[A_{n-1}A_n]$, è forza concluder che P (diverso da A e da A_n) giace fra i punti A e A_n (P 19 § 3). Pertanto l'ipta. 1) involge contraddizione a P 12 § 3.

2) Il punto C, se è possibile, giaccia fra A_n e P. Dunque ancor nel segmento $[A_{n-1}A_n]$ (P 19 § 3): per la qual cosa ognuno dei punti C e P giacerebbe in $[A_{n-1}A_n]$ senza coincider col punto A_n . Ma questo intervallo è simmetrico di $[AA_1]$ (P 16) al par di CP; e però son simmetrici l'uno dell'altro i segmenti $[A_{n-1}A_n]$ e CP (P 10 § 3, P 18). Dunque l'ipta. 2) risulta in opposizione a P 15. Ecc.]

P 22 — Tr. « Qual si voglia similitudine che ammetta due punti tantologhi, l'uno diverso dall'altro, dovrà tener fermo eziandio ciascun punto che spetti alla lor congiungente ». [Se esser può, supponiamo che nella retta AB coesistano due punti P e P' non coincidenti fra loro, ma corrispondenti in virtù d'una similitudine δ per cui $\delta A = A, \delta B = B, \delta P = P'$. Per certo il punto P è nel raggio AB, ovvero nel raggio BA (P 29, 30 § 3). Sia p. es. in AB: onde anche il punto P' è tenuto a giacere in AB, perchè questo raggio sarà convertito in sè stesso da δ (P 8); ma l'un punto e l'altro sarà diverso da A. Dunque delle due cose l'una: o P giace fra A e P', o P' fra A e P (P 33, 11 § 3). Ne viene che un punto, il quale stia fra P e P', giacerà in uno solo dei due segmenti AP o AP' (P 18 § 3), che si corrispondon fra loro; e per cons. non potrà esser tantologo in δ . D'altra parte fra i punti P e P' cadon sempre dei punti medio-simmetrici della coppia (A, B) (P 21), i quali son tutti tantologi rispetto a δ (P 18): dunque l'ipta. P \sim P' genera contraddizione].

Non può sfuggire al L. l'analogia col *teorema fondamentale* della Geometria Proiettiva, e teorema di STAUDT. E invece, di fronte alla « Geom. delle similitudini », questa P 22 compie il medesimo ufficio, che il teorema fondamentale di STAUDT ha verso la « Geom. delle collineazioni » (1).

P 23 — Tr. « Una similitudine, che tenga fermi tre punti non collineari, non può esser che la simmetria rispetto al piano di questi, seppur non è la « trasformaz. » identica. Ved. P 2 ». Se A, B, C sono i punti che si suppongono tantologi, ciascun punto sta della retta AB, sia delle rette AC, BC, sarà convertito in sè stesso (P 22); e per cons. ognl sfera, che abbia il centro in A, o in B, o in C, sarà necessariamente tantologa (P 20 § 2, P 1). Ne viene, che ciascun punto del piano ABC corrisponde a sè stesso (P 27 § 1); e che un punto esterno al piano ABC,

(1) E la maniera onde si stabilisce non è diversa da quella che l'A. già tenne e sviluppò nella Nota « Circa il teorema fondamentale di STAUDT, ecc. » (Atti d. Acc. di Scienze d. Torino, vol. XXXII, 1904)

— sia per es. D — tutto che scelto ad arbitrio, avrà per immagine un punto D' comune alle sfere D_1, D_2, D_3 : per la qual cosa D' coinciderà con D , ovver col simmetrico di questo punto rispetto al piano ABC (P 29-31 § 2). Ma nel primo caso ogni punto coinciderà con la propria immagine (P 40 § 2) — perchè le sfere intorno al punto D saranno anch'esse tautologhe — e nell'altro caso ogni punto esterno a quel piano è diverso dal punto omologo. Ecc.] — E s'èce altresì dimostrato il seguente:

P 24 — Tr. « Una similitudine, la quale consenta più punti tautologici non complanari, si confonde con l'identità ».

P 25 — Tr. « Dati i punti non collineari A, B, C , qualsivoglia rotazione \mathfrak{R} intorno alla retta BC si può sempre aver componendo lo specchiamento al piano ABC con lo specchiamento al piano polare dei punti A ed $\mathfrak{R}A$. Ved. P 38 § 2 o P 4, 5, 8 ». [Si può conceder che AB sia perpendicolare a BC . — Or se \mathfrak{R} fosse precisamente il semigiro intorno alla retta BC (P 7), basterebbe appellarsi a P 6. Poniamo dunque che la rotazione onde si parla sia diversa dal semigiro; e subordini ai punti (distinti) A_1 ed A i punti A ed A' : di guisa che $\mathfrak{R}A_1 = A$ o $\mathfrak{R}A = A'$. I punti A e A' giacciono insieme sulle due sfere tautologhe A_1 e A_2 (P 23 § 2), e il loro punto medio — che chiameremo D — non appartiene all'asse (P 10): onde la retta AA' è normale ad ambo le rette DB e DC (P 3, 5 § 2) e i punti A e A' sono l'uno l'altro simmetrici rispetto al piano BCD . Osservate che — posto $D_1 = A_1A$ — sarà D_1 fuor di BC come D ; e i punti D_1 e D saranno omologhi secondo \mathfrak{R} (P 23 § 2) e p. c. diversi fra loro (P 6): onde A_1 è diverso da A' ; e i punti A_1, A ed A' , in quanto appartengono tutti alla sfera A_1 , non collineano (P 45 § 1). Inoltre la retta BC , supposta normale a BA , è altresì perpendicolare a ciascuna delle BA_1, BA' (P 23 § 2). D'altra parte \mathfrak{R} subordina la polosfera dei punti A, A' a quella dei punti A_1, A : queste due sfere sono dunque simmetriche l'una dell'altra rispetto ad un piano, che passa per l'asse BC (P 11); e p. c. simmetrici l'uno dell'altro, rispetto al medesimo piano, anche i centri D_1 e D , come pure i due cerchi A_1A_2 e A_2A' , che il piano A_1AA' perpendicolare in B a BC (P 34, 35 § 2) determina su quelle sfere. Detti cerchi si taglieranno in due punti distinti A ed E , poi che A non spetta a DD_1 (P 47 § 1); e il piano polare di questi punti A ed E conterrà D_1 e D (P 38 § 2), ma non la retta BC , visto che i punti B, C, D e D_1 non sono complanari (P 10). Dunque è forza che ognuno dei punti A ed E sia convertito in sé stesso dalla simmetria che scambia fra loro i due cerchi: onde ABC sarà il piano di simmetria; e p. c. anche i punti A_1 ed A' s'esciranno simmetrici l'uno dell'altro rispetto al piano ABC . Di qui si deduce, indicando con \mathfrak{L} ed \mathfrak{O} gli specchiamenti nei piani BCA, BCD : $\mathfrak{R}A = A' = \mathfrak{O}\mathfrak{L}A$, $\mathfrak{R}A_1 = A = \mathfrak{O}\mathfrak{L}A_1$, $\mathfrak{R}B = B = \mathfrak{O}\mathfrak{L}B$, $\mathfrak{R}C = C = \mathfrak{O}\mathfrak{L}C$. Pertanto la similitudine $\mathfrak{R}\mathfrak{O}\mathfrak{L}$ converte in sé stesso ciascuna dei punti non complanari A, A_1, B, C ; dunque (P 24) $\mathfrak{R}\mathfrak{O}\mathfrak{L} = 1$, e p. c. $\mathfrak{O}\mathfrak{L} = \mathfrak{R}$: c. v. d.]. — Con questo ragionamento abbiamo altresì dimostrato che:

P 26 — Tr. « Sotto le stesse lpt., la rotazione \mathfrak{R} risulta ancora dallo specchiamento al piano BCD , seguito dallo specchiamento al piano ABC : ovver dallo

« specchiamento a BCD, seguito dallo specchiamento ad ABC ». — E resta provato altresì che:

P 27 — Tr. « Se per mezzo d'una rotazione arbitraria si passa da un punto A, dato a piacere, ad un altro punto A diverso dal primo, la stessa rotazione dovrà trasferire quest'altro punto A nel simmetrico di A, rispetto al piano che anisce a A con l'asse ». — Per la qual cosa:

P 28 — Tr. « Due diverse rotazioni intorno al medesimo asse, capaci sì l'una che l'altra di coordinare ad un punto, il quale non giaccia sull'asse, un medesimo punto, non possono consistere ». — E qui tosto:

P 29 — Tr. « È unica la rotazione, che trasferisce un dato semipiano in un altro, ambedue limitati dall'asse. Ved. P 9 ».

P 30 — Tr. « Qual si voglia similitudine, per cui sian tautologi i punti d'una medesima retta ed essi soltanto, è una rotazione. Ved. P 8, 23 ». [A, B, C siano punti non collineari; e poniamo che la similitudine δ converta in sé stesso ciascuno dei punti B e C — e p. e. ogni punto della congiungente BC (P 22) — ma non abbia altri punti tautologi. Diciasi A' quel punto, che δ sostituisce ad A; e D sia il punto medio fra questi. Si può conceder che AB — e p. e. anche A'B — sia normale a BC. I punti B ed A', certamente diversi fra loro, equidistano dal punto B; però che la sfera A₂ è tautologa rispetto a δ . Ora esiste di certo una rotazione \mathfrak{G} intorno alla retta BC, che subordina il semipiano BC verso A' al semipiano BC verso A (P 9), dunque il raggio B verso A' al raggio B verso A, e p. e. A' ad A (P 37 § 3). Pertanto la similitudine $\mathfrak{G}\delta$ converte in sé stesso ciascuno

dei punti A, B, C: onde: $\mathfrak{G}\delta = 1$ (vale a dire $\delta = \mathfrak{G}$), oppure $\mathfrak{G}\delta = \overline{1}/ABC$ (P 23). Ma il secondo evento è da escludere, poi che da $\delta = \mathfrak{G} \overline{1}/ABC$ nascerebbe, grazie a P 25: $\delta = \overline{1}/DBC \cdot \overline{1}/ABC \cdot \overline{1}/ABC$; onde $\delta = \overline{1}/DBC$, che è contro l'Ipt. (P 31 § 2)].

P 31 — Df. « Si dirà che le coppie di punti (A, B) e (C, D) sono « congrue » (o « congruenti » fra loro » — o si scriverà, se si piace, $(A, B) \simeq (C, D)$ — « per significar che le sfere B₂ e D₂ son simmetriche l'una dell'altra ». — Dicendo « simmetriche » si sottintende "rispetto al punto medio dei centri"; ovvero — quando A e C non coincidano — "rispetto ad un asse perpendicolare in A/C alla linea dei centri", o "rispetto al piano polare dei centri": che è sempre la stessa cosa, in virtù di P 43, 46 § 2.

P 32 — Tr. « Premesso che A, B, C, D, E, F sono punti: 1) se (A, B) è congruente a (C, D), viceversa (C, D) sarà congruente ad (A, B); 2) se avviene che le coppie (A, B) e (C, D) siano congrue fra loro, e così le (A, B) ed (E, F), eziandio le (C, D) ed (E, F) saranno congrue fra loro [P 13]; 3) le coppie (A, B), ed (A, B) come pure le (A, A) e (B, B), e similmente (A, B) e (B, A), sono congrue fra loro [P 46 § 1, P 44 § 2] ».

P 33 — Tr. « Ogni qualvolta due coppie di punti sono congrue fra loro si può sempre passare dall'una all'altra per mezzo d'un semigiro, o attraverso due semigiri ». [Se $(A, B) \simeq (C, D)$ ed $A \sim C$, il semigiro intorno ad un asse normale alla retta AC nel punto A/C porterà A in C; e di B farà un punto B', che deve giacer su D, per Ipt. (P 31, ecc.). Or se B' = D, non c'è altro da fare.

Ma se B' è diverso da D , perchè si converta in D , fermo restando C , basterà che si effettui anche il semigiorno intorno ad un asse il quale contenga C e sia normale alla retta $B'D$ (P 3-5 § 2).]

P 34 — Tr. « Dir che le coppie di punti (A, B) e (C, D) siano congrue fra loro, o che le polosfere di (A, B) e (C, D) siano simmetriche l'una dell'altra, è la stessa cosa. Ved. P 4 § 3. [Se p. es. $(A, B) \asymp (C, D)$, la simmetria rispetto al punto A/C , permutando le sfere B e D , (P 31), rappresenta B in un punto B' , che deve giacere su D ; e converte la $Sfr(A, B)$ nella $Sfr(C, B')$. Or, se $B' \sim D$, la polosfera dei punti C e B' o quella dei punti C e D sono simmetriche l'una dell'altra rispetto ad un asse, il quale contenga C e sia normale alla retta $B'D$. Dunque la polosfera di (A, B) simmetrica alla polosfera di (C, D) (P 18). — E se viceversa le polosfere di (A, B) e (C, D) sono simmetriche, e i punti A' e B' corrispondono ai punti A e B ; allora, ove già non coincidano i punti B' e D , le sfere D e B' si scambieranno fra loro per mezzo del semigiorno intorno ad un asse, il quale contenga C/D e sia normale a $B'D$: onde $(A, B) \asymp (A', B') \asymp (C, D)$; ecc.]. — Grazie a questa prop., la 'congruenza fra coppie di punti' (P 31) si potrebbe altresì definire sostituendo alle sfere B e D le polosfere inerenti a quelle due coppie: se non che il pregio della simmetria verbale non compensa, secondo me, l'intervento dei punti medi e delle congiungenti, che si evita nell'altro modo.

P 35 — Tr. « Se una similitudine è tale, che una coppia di punti l'una l'altro « distinti sia congruente alla coppia omologa, allora due coppie omologhe quali che « siano risultano congrue fra loro ». [Una similitudine δ coordini ai punti A e B (diversi fra loro) i punti A' e B' ; e siano congrue fra loro le coppie (A, B) e (A', B') . Indichiamo con \mathcal{C} una similitudine (semigiorno, o prodotto di due semigiri) capace di trasferire (A, B) in (A', B') (P 33); così che $\mathcal{C}A = \delta A = A'$, $\mathcal{C}B = \delta B = B'$. Allora la trasformazione $\mathcal{C}\delta$ — risultante, o prodotto di δ per la similitudine inversa di \mathcal{C} — sarà una certa similitudine (P 2) che tiene fermo ciascuno dei punti A e B : dunque una similitudine, per cui tutti i punti di AB son tautologi (P 23). Ora una trasformaz. si è fatta necessariamente equivalente ad una rotazione \mathcal{R} intorno ad AB , oppure si confonde con lo specchiamento \mathcal{S} ad un certo piano che passa per questa retta, oppure è l'identità (P 30, 23, 24): onde avremo:

$$\delta = \mathcal{C}\mathcal{R}, \text{ oppure } \delta = \mathcal{C}\mathcal{S}, \text{ oppure } \delta = \mathcal{C}.$$

D'altra parte ciascuna delle \mathcal{C} , \mathcal{R} e \mathcal{S} converte ogni sfera in un'altra, ch'è sempre a quella simmetrica (P 52 § 1; P 23, 41 § 2; P 11, 13): così dunque anche δ (P 13); e resta solo da appellarsi a P 31].

P 36 — Df. « La similitudine, che rappresenta ogni coppia di punti in un'altra congrua alla prima — over (che è lo stesso) ogni sfera in un'altra simmetrica a quella — prende il nome di 'isomeria' ⁽¹⁾. 'Isomere' son da

⁽¹⁾ Nome che (se non erro) fu già proposto da Ch. Méray nel *Nouveaux éléments de Géométrie* (Paris, 1874), e comprende tutte le operazioni fondamentali chiamate altresì 'movimenti di 1^a e 2^a specie', 'eguaglianze metriche', o semplicemente 'eguaglianze'. Se non che questa parola 'eguaglianza', racchiude un senso ben più generale ed astratto, comune a quasi tutte le scienze; onde spetta naturalmente alla Logica.

« chiamar due figure che si corrispondon fra loro, punto per punto, secondo una « isomeria ». Una relazione sì fatta è palesemente invertibile, cioè covariva e reciproca; e per affermare ch'essa abbia luogo in ordine a date figure F, F' noi scriveremo talvolta $F \simeq F'$: dove il segno ' \simeq ' si legge « è isomera con ». — Ma ogni qual volta si parli di *figure piane* (coppie di punti, segmenti, angoli, triangoli, cerchi, ecc.) che si corrispondon per mezzo di un'isomeria, le chiameremo « altre » « congruenti fra loro », o « sovrapponibili ». Ved. P. 1, 31, 35 ». Di dir qui tosto, in virtù di P 32:

P 37 — Tr. « Qualunque figura è isomera di sè medesima: cioè l'identità « spetta all'isomeria. Da $F \simeq F'$ si deduco $F' \simeq F$: ciò è l'operazione inversa « d'ogni isomeria sarà sempre un'isomeria. Due figure, ciascuna isomera con una « terza figura, sono anche isomere fra loro; onde l'isomeria è transitiva, vale a « qualsivoglia prodotto d'isomeria sarà sempre un'isomeria ».

P 38 — Tr. « La simmetria, la rotazione — e ogni trasformazione com- « posta di simmetrie o di rotazioni — sono tutte isomerie. Viceversa un'isomeria « qualsivoglia, se non è simmetria, sarà eguale al prodotto di due o più sim- « metrie ». [La prima parte è conseguenza immediata di P 22 § 2 e P 2, 35-37. L'altra si è già stabilita implicitamente nel dimostrare la P 35].

P 39 — Tr. « Purchè gli A, B, C siano punti non collineari e così D, E, F, « esiste almeno un'isomeria che traduce A in D, il raggio A verso B nel raggio D « verso E, e il semipiano AB verso C nel semipiano DE verso F ». [L'inversione « e rispetto al punto A | D rappresenti B e C coi punti B' e C'; e, se B' non è « già nel raggio DE, sia B'' la traccia di questo raggio sopra la sfera B'' (P 37 § 3). Allora — secondo che i punti B', B'' e D sono, o non sono, per diritto — l'equi- « versione rispetto a D, o il semigioco intorno alla retta che unisce i due punti B' | B'' e D, porta B' in B'' tenendo fermo D; e a C' dà per immagine un punto, « che chiamerò C'', esterno alla retta DE. Appresso, ove questo punto già non appa- « tenga al semipiano DE verso F, esiste una rotazione (intorno la retta DE) che « ce lo conduce (P 44 § 3, P 7, 9) senza alterar B'' nè D (P 23 § 2). E così per mezzo « di isomerie (P 38) siamo passati da A, | AB, | (AB)C a D, DE, (DE)F; e resta « sol da appellarsi a P 37]. Or se qui supponiamo le rette AC, DF perpendicolari « alle rette AB, DE, bisognerà che anche il raggio | AC si sovrapponga al raggio | DF « (P 11 § 2, ecc.), e l'angolo A. BC all'angolo D. EF (P 47 § 3): per la qual cosa:

P 40 — Tr. « Tutti gli angoli retti sono congrui fra loro. Ved. P 36 ». — Inoltre »

P 41 — Tr. « Due raggi, o due semipiani, tutto che dati a piacere, son sempre « congrui fra loro; e sempre in essi le origini si corrispondon fra loro. Ved. P 54 § 3 ».

P 42 — Tr. « Nell'Ips. P 39, se \mathcal{O} è un'isomeria che rispecchi ordinatamente « gli A, | AB, | (AB)C con D, | DE, | (DE)F, qualunque isomeria che produca questo « medesimo effetto sarà equivalente ad \mathcal{O} , oppure ad \mathcal{O} seguita dallo specchiamento « nel piano DEF ». [Invero — posto $B' = \mathcal{O}B, C' = \mathcal{O}C, \mathcal{S} = /DEF$ — e detta \mathcal{J} « un'isomeria capace di rappresentar (come \mathcal{O}) gli A, | AB, | (AB)C con D, | DE, | (DE)F, « bisognerà che anche \mathcal{J} traduca B in B' (P 37 § 3); quindi le sfere C, e C', nelle « sfere omologhe a questo per simmetria rispetto ad A | D e a B | B' (P 31, 38), cioè

nelle sfere C_a e C_b ; insomma il punto C — comune a C_a , C_b e $|(AB)C$ — nel punto C', ch'è il solo punto comune a C_a , C_b e $|(DE)F$ (P 47, 49 § 1, P 44 § 8, ecc.). Dunque le isomerie \mathcal{O} ed \mathcal{S} rappresentano, sì l'una e sì l'altra, i punti A, B, C coi punti D, B', C'; per la qual cosa il prodotto $\mathcal{S}\mathcal{O}^{-1}$ è un'isomeria che tien fermo ciascuno dei punti non collineari D, B', C'. Dunque $\mathcal{S}\mathcal{O}^{-1} = 1$, oppure $\mathcal{S}\mathcal{O} = \mathcal{S}$ (P 23); cioè (moltiplicando a destra per \mathcal{O}): $\mathcal{S} = \mathcal{O}$, oppure $\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{O}$.

P 43 — Tr. « Ogni qualvolta A, B, C sono punti non collineari, bisognerà che i due raggi AB e AC sian simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad un asse: onde la coppia dei raggi AB e AC sarà sempre congrua alla coppia AC e AB ». ECCOL. libro I, prp. IX. [Se D è quel punto di AC, che dista da A quanto B (P 37 § 3), que' due raggi si scambieranno fra loro per mezzo del semigiro intorno alla congiungente di A col punto B] (P 3-5 § 2; P 34 § 3).

P 44 — Tr. « Se due segmenti o due angoli piani convessi sono congrui fra loro, anche la coppia dei punti estremi o dei lati dell'uno sarà congrua alla coppia dei punti estremi, o dei lati, dell'altro: e reciprocamente ». [Così da P 54, 55 § 3, ecc.].

P 45 — Tr. « Qualunque volta i punti A, B, C non collinano, e D sia un punto del semipiano da AB verso C, ma esterno al raggio AC, non potrà darsi che gli angoli \hat{A} , BC, \hat{A} , BD siano congrui fra loro ». [Poi che l'identità converte gli A, AB, (AB)C rispettivamente in A, AB, (AB)C, nessun'altra isomeria produrrà quel medesimo effetto, tranne lo specchiamento al piano ABC (P 42), che non altera alcuno degli elementi suddetti. Dunque, intanto che il raggio AD è diverso dal raggio AC, la coppia (AB, AC) non sarà congrua alla coppia (AB, AD) (P 41, 54 § 3), quindi nemmeno alla coppia (AD, AB) (P 37, 43): sicchè gli angoli \hat{A} , BC e \hat{A} , BD non potranno esser congrui fra loro (P 44).] — E di qui nasce, avuto riguardo a P 42, 43 § 3:

P 46 — Tr. « E, se $C' = C/AB$, nessun raggio avente origine in A e giacente sul piano ABC, ma diverso da ognuno degli AC, AC' può racchiuder col raggio AB un angolo congruo ad \hat{A} , BC. Ved. P 47 § 1 ».

P 47 — Tr. « Nessun angolo piano è simmetrico di sé medesimo, rispetto a due rette diverse ». [A, B, C siano punti non collineari, e C disti da A quanto B. Che, rispetto ad un certo asse r , l'angolo \hat{A} , BC (o \hat{A} , BC) sia simmetrico di sé medesimo, già si sa da P 43, 44. D'altra parte ogni assai simmetria, che rispecchi in sé stesso quell'angolo, dovrà permutarne i due lati AB e AC (P 55 § 3): perchè, se potesse rappresentarli ciascuno in sé stesso, terrebbe fermo anche ognuno dei punti A, B, C (P 37 § 3). Dunque una tal simmetria dovrà permutar B con C (ibid.), senza rimovere A: e però l'asse di simmetria, contenendo ambo i punti (l'un l'altro distinti) A e B/C (P 54 § 1), si confonde necessariamente con r (P 19 § 1).]

P 48 — Df. « Bisettrice di un angolo piano » è quella semiretta, che ha come origine il vertice, e giace ad un tempo nell'angolo dato e nell'asse di simmetria del medesimo. Ved. P 47 § 3 e P 43, 47 ».

P 49 — Tr. « Se due angoli piani convessi sono congrui fra loro, tali saranno anche gli angoli convessi, che le bisettrici di quelli formano rispettivamente

« coi lati dell'uno e dell'altro. Ved. P 48 ». [In vero l'isomeria, che è per sovrapporre l'uno degli angoli all'altro (P 36), dovrà eziandio sovrapporre le bisettrici, grazie a P 47.]

§ V.

Relazione di minore e maggiore fra due segmenti od angoli piani. Congruenza dei triangoli. Somma di due segmenti o di due angoli piani convessi. Altre proprietà di triangoli, cerchi, sfere, ecc.

P 1 — *Df.* « Se A, B, C, D sono punti, A diverso da B, l'asserir che "il segmento $|AB|$ è minor del segmento $|CD|$ ", o che " $|CD|$ è maggiore di $|AB|$ " — " $|AB| < |CD|$ ", o " $|CD| > |AB|$ " — è un modo di esprimere qualmente; "esiste un'isomeria, per la quale un estremo, A o B, del primo segmento si trasferisce a un estremo, C o D, del secondo; e l'altro estremo di $|AB|$ ad un punto, che giace fra C e D"; ovvero, che è lo stesso: "esiste fra i punti C e D un punto — sia per es. X — tale che $|AB|$ sia congruente a $|CX|$ o a $|DX|$ ". Vedasi P 10 § 3 e P 36 § 4. E allorchando i punti A e B si confondon tra loro, la frase " $|AB| < |CD|$ ", o l'altra " $|CD| > |AB|$ ", servirà unicamente ad esprimere che "i punti C e D non coincidono" — Corollari quasi immediati i seguenti: "Ogni qual volta C appartiene ad $|AB|$, ma è diverso da B, sarà sempre $|AC|$ minore di $|AB|$ " (P 37 § 4). E: "Se due segmenti sono congrui fra loro, la medesima relazione di $<$, \simeq , o $>$, che interceda per avventura fra il primo di essi ed un terzo, avrà luogo eziandio fra il secondo ed il terzo". (Ivi) ».

P 2 — *Tr.* « Se A, B, C, D sono punti, e $|AB|$ è minor di $|CD|$, esisterà senza fallo un'isomeria che inserisca $|AB|$ in $|CD|$, ancorchè sia prescritto quale dei punti estremi A e B vogliamo che si porti in C, o qual degli estremi C e D si vuole occupar con A. Ved. P 1 ». [In vero, se per mezzo di un'isomeria si può fare, che A venga tradotto in C, e B fra C e D; si potrà ulteriormente tradurre A in D, con l'aggiunta di un'equiversione rispetto al punto C/D; e ciò senza distorglier B dall'interno del segmento dato $|CD|$. Eec.].

P 3 — *Tr.* « Dati a piacere quattro punti A, B, C, D, delle tre cose l'una: o $|AB|$ sarà congruo a $|CD|$, o $|AB|$ minor di $|CD|$, o $|AB|$ maggior di $|CD|$; e ciascuno di questi casi escluderà gli altri due ». [Mi restringo a supporre $A \sim B$ e $C \sim D$. Circa la prima parte del Tr. basta portare il raggio $|AB|$ sopra l'altro $|CD|$, a tenore di P 41 § 4; dopo di che, se B non cadrà su D, bisognerà che addivenga in un punto interno a $|CD|$, ovvero nel prolungamento oltre D (P 29 § 3). — Ora, se per es. $|AB| \simeq |CD|$, non può esistere un'isomeria che trasporti A in C, e B in un punto B'. il quale appartenga a $|CD|$ senza coincider con D: però che un segmento come $|CB|$ non è mai congruente a $|CD|$ (P 46 § 1, P 37 § 2, P 31 § 4). Così resta provato che il fatto $|AB| \simeq |CD|$ non va d'accordo col fatto $|AB| < |CD|$

(P2), nè con l'altro $|CD| < |AB|$; essendo qui lecita la sostituzione $\begin{pmatrix} C, D, A, B \\ A, B, C, D \end{pmatrix}$.

E con un simile ragionamento si prova anziando l'incompatibilità delle ipta. $|AB| < |CD|$ e $|CD| < |AB|$, che involgerebber l'esistere di isomerie capaci di rappresentare l'una i punti (A, B) coi punti $(C, B') = B'$ giacente fra C e $D =$ l'altra i punti (C, D, B') coi punti $(A, D', B'') = D'$ giacente fra A e B, B' fra D' ed $A =$ e perciò anche d'isomerie che trarrebbero B in B' senza rinnovare A (P 37 § 4); ecc.] — E con questo abbiamo altresì dimostrato il seguente:

P 4 — Tr. « E se A non coincide con B , nè C con D , qualsivoglia isomeria che abbia effetto di sovrapporre il raggio $|AB|$ al raggio $|CD|$, farà che B si converta in un punto interno od esterno a $|CD|$, ovvero coincidente con D , « secondo che $|AB|$ sia minore, o maggiore, o congruo a $|CD|$ ».

P 5 — Tr. « Se di tre dati seguenti il primo è minor del secondo, e questo è minore del terzo, anche il primo sarà minore del terzo ». [Siano A, B, C, D, E, F punti dati. Se p. es. l'isomeria \mathcal{A} traduce A in C , e B in un punto B' fra C e D (P 1); e similmente l'isomeria \mathcal{E} porta C in F , e D in un punto D' tra F ed E : allora B' , a cagione di \mathcal{E} , verrà condotto in un punto B'' tra D' ed F , poi che il giacer fra due punti è proprietà covariante di questi, rispetto all'isomeria (P 3, 36 § 4). Perciò B'' è fra i punti F ed E (P 19 § 3); dunque il segmento $|AB|$, congruente a $|CB'|$, sarà minor del segmento $|FE|$, (P 1). Ecc.]

P 6 — Tr. « Qualunque siano i punti A, B, C e secondo che $|AC|$ è minore, o maggiore, o congruo ad $|AB|$, il punto C sarà interno, od esterno, o appartenente alla sfera B_1 . Ved. P 5 § 3 ». Se p. es. $B \sim A$ e $|AB| < |AC|$, dovrà esistere un'isomeria che, non alterando A , metta B in un punto B' fra A e C (P 1.2); onde C esterno ad $|AB'|$ (P 11, 12 § 3). D'altra parte C sarà esterno ad $|AB''|$, se $B' \equiv B/A$; in quanto giace nel raggio $|AB'|$ (P 29 § 3), che non ha punti a comune col raggio $|AB''|$, eccezion fatta di A (P 30, 32 § 3), ma C è diverso dai punti A, B', B'' . Dunque C esterno al segmento $|B'B''|$ (P 11, 20 § 3), che è quanto dire esterno alla sfera B_1 (P 6, 10 § 3). — E così dall'ipta. $C \sim A$ e $|AC| < |AB|$ nasce che $(A, C) \succ (A, C')$, essendo C' un punto compreso fra A e B . Ma un tal punto è obbligato a giacer fra B e B/A ; dunque C' , e p. c. anche C , sarà interno alla polsfera dei punti B e B/A (P 10 § 3), vale a dire a B_1].

P 7 — Tr. « Qualunque siano i punti A, B, C , se C sarà interno alla sfera di B , centro A , allora B sarà esterno alla sfera C_1 ; e reciprocamente: inoltre ogni punto interno a C_1 , sarà interno a B_1 . » [Così da P 6, 5, ecc.]

P 8 — Tr. « E ogni retta che passi da un punto interno, taglia la sfera in due punti, sempre diversi fra loro ». [Il punto C sia, come dianzi, interno alla sfera B_1 . Or se la retta passi per A , o sia perpendicolare a CA , si ritorna a P 20 § 2, o a P 7, 3 § 3. Se no, calata dal centro la perpendic. AD sulla retta, il piede risulta interno a C_1 (P 26 § 3), dunque interno a B_1 (P 7): dunque è vero che la DC (in quanto è normale a DA) ne incontra due volte la sfera].

P 9 — Tr. « Qualunque retta contiene dei punti esterni a una sfera data a piacere ». [La data sfera sia p. es. B_1 : si può conceder che $B \sim A$. Or se la retta è tangente alla sfera in un punto C , ogni suo punto diverso da C sarà

esterno (P 27 § 3). E se un punto D sulla retta è interno alla sfera, così che $|AD| < |AB|$ (P 6); allora, preso un punto esterno a piacere — quale ad es. $A' = A/B$ — sarà inoltre $|AB|$ minore di $|AA'|$; dunque $|AD| < |AA'|$ (P 5), e p. c. D interno alla sfera A' , (P 6). Questa pertanto s'incontra con la retta data (P 8), e i punti comuni saranno esterni a B, come A' (P 8 § 3)].

P 10 — Tr. — I punti A e B son distinti, C è punto esterno a B, e un piano α che passa per tutti e tre: si dimostra che in questo piano si possono tirar da quel punto due rette tangenti alla sfera α . Eucl., lib. 3°, prp. XVII. [Uno qualunque dei punti, dove s'incontran la retta CA e la sfera B, (P 20 § 2), sarà interno alla sfera C, (P 7), e sia p. es. D: onde la retta perpendic. a CA, che nel piano α può condursi dal punto D, taglia in due punti la sfera C. Detti E ed E' questi due punti, ed F, F' i piedi delle normali abbassate dal punto C alle rette AE, AE'; se si ribalta il piano α su sè stesso intorno ai punti (diversi fra loro) A e C/E come cardini (P 51 § 1), ne usciranno scambiali fra loro i punti C ed E, e permutate le rette CA, EA. Dunque la retta ED, perpendic. a CA, cuopre la retta CF, perpendic. ad EA (P 9, 23 § 2); dunque anche i punti D ed F si barattan fra loro: e perciò F, come D, starà sul cerchio B, che non s'altera (P 50 § 1); e la retta CF è tangente, al pari di ED (P 8 § 2). Così ancor CF' è tangente: e il Lettor può vedere, che queste due rette CF' e CF non coincidono].

P 11 — Tr. — Sempre che gli A, B, C siano punti, C giacente fra A e B; la polosefera di (A, B) e la sfera di C intorno ad A s'incontrano. [Posto M = A/B ed N = A/C, converrà che il punto N stia fra i punti M ed A: se no M sarebbe interno ad AN] (P 29, 33 § 3) — visto che gli M, N, A son distinti e che M, N e [AB] — e però B giacerebbe fra A e C (P 14 § 4), contro l'ip. (P 12 § 3). Dunque M esterno alla sfera N, (P 1, 6); dunque esiste sopra N, qualche punto D tale, che $MD \perp DA$ (P 10, ecc.). Ora il punto A/D giacerà sulla sfera A, (P 3-5 § 2), che è la sfera polare di A e B; come ancor sulla sfera C, visto che il punto A/D si scambia col punto A/N, ossia con C, (e C, si converte in sè stessa) per mezzo del semigiro intorno ad un asse il quale contiene A].

P 12 — Df. — Di due angoli piani convessi (e così per due angoli concavi) si dice che il primo è *minore* ('<') del secondo, o che questo è *maggiore* ('>') del primo, ogni volta ch'esiste un'isometria per la quale un lato del primo angolo si sovrappone ad un lato del secondo angolo, e l'altro lato del primo ad un raggio interno al secondo. Ved. P 47 § 3 e P 41 § 4. — Vale a dire — se p. es. A, BC s'ù EF sono gli angoli dati (presumo che non collinano i punti A, B, C, nè i punti D, E, F) — ogni volta ch'esisterà un punto X interno a D, EF e tale che l'angolo A, BC sia e congrue all'angolo D, EX e all'angolo D, FX. Cfr. P 1. — Se non vogliamo distinguer fra 'convesso' o 'concavo', potremo anche adottar la seguente dfn (che, sotto forma poco diversa, equivale alla preced. nei casi che l'una e l'altra contemplano): « Si dice che l'angolo α , convesso o concavo, è *minore* dell'angolo β (eziandio convesso o concavo) per affermar l'esistenza di un angolo congruo con α , il quale abbia un lato o comune con β e sia contenuto da β , pur senza coincider con β . — Giova osservar senza indugio, che a ragione di P 43 § 4 abbiamo:

P 13 — Tr. « Dati i punti A, B, \dots, P come sopra, se esiste un'isomeria che « coordini al raggio $|AB|$ il raggio $|DE|$, e al raggio $|AC|$ un raggio interno all'angolo $\hat{D}.EF$ (ovvero all'angolo $\hat{D}.EF$), dovrà esistere un'isomeria che trasformi « $|AB|$ in $|DF|$, ed $|AC|$ (come l'altra) in un raggio interno a $\hat{D}.EF$ (o rispettiv. a « $\hat{D}.EF$) ». Cfr. P 2.

P 14 — Tr. « Anzi ciascuna delle isomerie, che trasformano il raggio $|AB|$ e il « semipiano $|AB)C$ nel raggio $|DE|$ e nel semipiano $|DE)F$, farà corrispondere al « raggio $|AC|$ un raggio interno, od esterno a $\hat{D}.EF$, secondo che l'angolo $A.BC$ « sarà minore, o maggiore, dell'angolo $\hat{D}.EF$ ». Cfr. P 4. [Se p. es. un'isomeria (che posso chiamare β) traduce $|DE|$ in $|AB|$, ed F in un punto F' interno all'angolo dato $\hat{A}.BC$ (onde $\hat{A}.BC > \hat{D}.EF$), il raggio $|AF'|$ dovrà passar fra B e C (P 47 § 3), tagliando ad es. quest'intervallo in G ; per la qual cosa $|AC|$, non passando fra B e G (P 12 § 3), sarà esterno ad $\hat{A}.BF'$ (P 43 § 3). Ne viene che la converso β^{-1} (P 37 § 4) porta $|AB|$ in $|DE|$, F' in F — dunque $|AB)C$ in $|DE)F$ (P 49, 41 § 3) — e C in un punto esterno a $\hat{D}.EF$. Ora, in virtù di P 42 § 4, le isomerie che convertono $|AB|$ in $|DE|$ e $|AB)C$ in $|DE)F$ saranno soltanto le equivalenti ad β , ovvero ad β seguita dallo spegchiamento $/DEF$. Eec.]

P 15 — Tr. « Sempre che gli A, B, C siano punti non collineari, e così « D, E, F , delle tre cose l'una: o l'angolo convesso $\hat{A}.BC$ sarà minore, o maggiore, « o congruo all'angolo convesso $\hat{D}.EF$: ma di questi tre casi, due non si possono « mai dare ad un tempo ». Cfr. P 3. [Dalla P 45 § 4, attraverso P 37, 39 § 4 e P 14, ecc.].

P 16 — Tr. « Se di tre angoli il primo è minor del secondo, o congruo al secondo, e questo è minore del terzo, anche il primo sarà minore del terzo ». Cfr. P 5.

P 17 — Tr. « Se tanto A, B, C , quanto D, E, F , sono punti non collineari, e « i lati $|AB|, |AC|$ e l'angolo $\hat{A}.BC$ del triangolo $|ABC|$ siano congrui rispettiv. ai « lati $|DE|, |DF|$ e all'angolo $\hat{D}.EF$ del triangolo $|DEF|$; sarà essendo il terzo lato « $|BC|$ congruo al terzo lato $|EF|$, e il triangolo congruente al triangolo; e dei rimanenti angoli saranno congrui fra loro $\hat{B}.AC$ con $\hat{E}.DF$, e $\hat{C}.AB$ con $\hat{F}.DE$, cioè « quelli racchiusi dai lati congrui. Ved. P 51 § 3. — Eucl., lib. 1°, prp. IV. [Perchè $\hat{A}.BC \simeq \hat{D}.EF$, dovrà esistere un'isomeria che traduce A in D , $|AB|$ su $|DE|$, $|AC|$ su $|DF|$ (P 44 § 4, ecc.): sia p. es. \mathcal{E} . Ora le coppie (D, E) e $(D, \mathcal{E}(B))$ sono congrue fra loro (P 37, 44, 32 § 4); e dall'altra parte sul raggio $|DE|$ nessun punto diverso da E dista dal punto D quanto E (P 37 § 3). Dunque $\mathcal{E}(B) = E$ (P 31 § 4), e al modo stesso $\mathcal{E}(C) = F$: ecc.] — Anche la prps. che segue contempla, sebbene indirettamente, un caso di congruenza fra triangoli: ved. P 44 § 4.

P 18 — Tr. « Due terne di punti (A, B, C) e (D, E, F) saranno congrue « fra loro, se tali siano ad un tempo le coppie (A, B) con (D, E) , (B, C) con « (E, F) , (A, C) con (D, F) ». — Eucl., lib. 1°, prp. VIII. [In primo luogo suppongo A, B, C non collineari. Sia dunque \mathcal{L} un'isomeria per la quale $\mathcal{L}A = D$, $\mathcal{L}B = E$, $\mathcal{L}C = C'$: onde i punti D, E, C' non collinano. Or dal supposto che $(A, C) \simeq (D, F)$ nascerà che $(D, C') \simeq (D, F)$: dunque $C' = F$ (P 46 § 1, P 31 § 4)

e per egual modo $C' = F_*$. Cosicchè se, per mezzo di rotazione intorno alla retta DE, coadiuciamo il punto C' in un piano φ che contenga tutti e tre i punti D, E, F (P 27 § 2), quel punto cadrà necessariamente su qualche punto comune ai due cerchi F_* , F_* : quindi (P 47 § 1, ecc.) o cadrà in F senz'altro, e verrà in coincidenza con F dopo il ribaltamento di φ su sè stesso intorno ai punti D, E come cardini (P 49, § 1). — Il resto al Lettore].

P 19 — Tr. — Essendo A, B, C punti non collineari, e D un punto arbitrario nell'ombra di C da B pur che diverso da C; l'angolo $\hat{C}.AD$ — esterno al triangolo $\triangle ABC$ — sarà maggior di ciascuno degli interni opposti $\hat{A}.BC$ e $\hat{B}.AC$. — EUCL., lib. 1°, prp. XVI. [Ponasi $E = A/C$, $F = B/E$. Il punto P giace nel semipiano $\{(AC)D$, perchè la retta CA, passando fra B e D e fra B ed F, non può passar fra D ed F (P 16 § 3); e giace ancora nel semipiano $\{(CD)A$, poichè la retta CD non potrebbe passare fra i punti F ed A, senza passare eziandio tra A ed E, ovver tra F ed E (P 13 § 3); dunque $F = \hat{C}.AD$ (P 49 § 3), anzi F interno a quest'angolo. Pertanto $\hat{C}.AF < \hat{C}.AD$ (P 12). Ma dall'essere i punti C ed F simmetrici degli A e B risp. ad E, quindi simmetrici l'uno dell'altro i segmenti $[BC]$ ed $[FA]$ e p. e. anche gli angoli $\hat{A}.BC$ o $\hat{C}.FA$ (P 47 § 3, ecc.), si deduce che questi saranno congrui fra loro (P 36 § 4). Dunque $\hat{A}.BC < \hat{C}.AD$ (P 16). — Resta il provare qualmente anche l'angolo $\hat{B}.AC$ sia minore di $\hat{C}.AD$: ma si lascia al Lettore].

P 20 — Tr. — Se — essendo dati i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ — gli angoli $\hat{B}.AC$ e $\hat{C}.AB$ dell'uno siano congrui rispettivamente agli angoli $\hat{B}.DF$, $\hat{F}.DE$ dell'altro, e di più siano congrui fra loro anche i lati $[BC]$ ed $[EF]$ compresi negli angoli congrui — eppure i lati $[AB]$ e $[DE]$, che sono opposti ad angoli congrui; sarà l'angolo rimanente $\hat{A}.BC$ congruo al rimanente $\hat{D}.EF$; e dei rimanenti lati saranno congrui fra loro quelli che sono opposti ad angoli congrui, vale a dire $[AB]$ con $[DE]$, $[AC]$ con $[DF]$. — EUCL., lib. 1°, prp. XXVI. [Sia dapprima $[BC] \simeq [EF]$. Per Ipt. esiste un'isomeria — la chiameremo \mathcal{I} — che trasforma la coppia dei raggi $[BA]$ e $[BC]$ nella coppia $[ED]$ ed $[EF]$ (P 44 § 4): dunque tale eziandio che il punto $\mathcal{I}C$ si confonde con F, oltre che il punto $\mathcal{I}B$ con E, per le ragioni testè assegnate nella dimostrazione di P 17. Ora, se il punto $\mathcal{I}A$ non coincidesse con D, converrebbe supporlo interno al segmento $[DE]$, ovver nel prolungamento di questo oltre D (P 29 § 3); ma nell'un caso verrebbe ad esser $\hat{C}.AB$ minore di $\hat{F}.DE$, nell'altro caso maggiore (P 12): ond'è forza che il punto $\mathcal{I}A$ si confonda con D (P 15); ecc. — Supposti invece congrui fra loro i due lati $[AB]$ e $[DE]$; se come dianzi portiamo $\hat{B}.AC$ a coincider con $\hat{E}.DF$, il punto A verrà in D; nè potrà darsi che C si riduca in un punto fra E ed F, nè che F rimanga compreso tra E e la nuova posizione di C: perchè nell'un caso l'angolo $(\mathcal{I}C)DE$, congruo a $\hat{C}.AB$, risulterebbe maggiore dell'angolo $\hat{F}.DE$; nell'altro, minore (P 19). Eec.

P 21 — Tr. — Se in un triangolo — essendo A, B, C tre punti non collineari — due lati $[AB]$ o $[AC]$ siano congrui fra loro, saranno congrui anche gli angoli opposti a quei lati; e prolungando i segmenti $[AB]$ e $[AC]$ di là da B e C nei punti D ed E, gli angoli $\hat{B}.CD$ e $\hat{C}.BE$ saranno anche congrui fra loro. — EUCLID., lib. 1°, prp. V. [Dall'Ipt., attraverso P 44, § 4 e P 46 § 1, deduciamo

che C appartenga alla sfera B_1 ; e che perciò, detto M il punto B|C, la retta BC sia normale alla retta MA (P 5 § 2). Dunque il ribaltamento del piano ABC su sè stesso intorno i punti M. A come cardini (P 51 § 1, ecc.) farà che gli angoli $\hat{B}.AC$ e $\hat{C}.AB$ si barattino fra loro, e così gli angoli $\hat{B}.ED, \hat{C}.BE$].

P 22 — Tr. « E se due angoli d'un triangolo sono congrui fra loro, eziandio i lati, che sono opposti agli angoli congrui, saranno congrui fra loro ». EUCL., lib. 1°, prp. VI. [Se — essendo $C.AB$ e $\hat{B}.AC$ gli angoli congrui — il lato $|AC|$ fosse minore di $|AB|$, dunque congruo a un certo segmento $|BD|$, D giacente fra A e B (P 1, 2), sarebbero congrui fra loro anche gli angoli $\hat{B}.CA$ e $\hat{C}.BD$, grazie a $(\overset{C, A, B, D}{A, C, D, E, F})$ P 17; vale a dir $\hat{C}.BA \simeq \hat{C}.BD$: ma ciò contraddice a P 12, 15. Ecc.].

P 23 — Tr. « Al maggior lato di un triangolo è opposto il maggior angolo ». EUCL., lib. 1°, prp. XVIII. — Vale a dire — essendo ancora A, B, C punti non collineari — dall'essere $|AB|$ minore di $|AC|$ si deduce che $\hat{C}.AB < \hat{B}.AC$. [Si può ragionare come EUCLID. al loc. cit., invocando successivamente le P 1, 2, 19, 21].

P 24 — Tr. « E, viceversa, al maggior angolo è opposto il maggior lato ». EUCL., lib. 1°, prp. XIX. [Dalle P 8, 21, 23, col noto ragionamento Euclideo.].

P 25 — Df. « Dati a piacere due segmenti α e β , e presi i punti A, B, C « in maniera, che B giaccia in $|AC|$ e che $|AB|$ e $|BC|$ siano congrui rispettivamente ad α, β ; l'attributo di « somma del due segmenti α e β » spetta a qualunque segmento congruo al segmento $|AC|$, e non si dà che per esso ». — Cioè per « somma di α con β » — o « $\alpha + \beta$ » — s'intende la « classe di tutti i segmenti congrui a un segmento $|AC|$ come sopra ». Ma le più volte (secondo l'uso) chiameremo anche « somma » dei due segmenti un qualunque segmento di detta classe. — Occorre sol di premettere alla dfn. (o di segnalar come chiusa) che « in qualunque modo si scelgano i punti A', B', C' sotto condizione, che B' appartenga ad $|A'C'|$ e che $|A'B'|$ e $|B'C'|$ siano congrui rispettiv. ad $|AB|$ e $|BC|$, il segmento $|A'C'|$ n'uscirà sempre congruo al segmento $|AC|$ »: in quanto (supposti gli A e B diversi fra loro) l'isomeria che traduce (A, B) in (A', B') (P 44, 32 § 4) rappresenta C in un punto C', del raggio A'B' per modo che $(B', C') \simeq (B', C)$ (P 29 § 3, P 36, 37 § 4, ecc.): onde $C_1 = C'$ (P 37 § 3).

P 26 — Tr. « Sotto la stessa Ipt., tanto è sommare α e β , quanto sommar β ed α ; perchè in ambo i modi si ottengono segmenti congrui fra loro (proprietà « commutativa »). E se di tre dati segmenti il primo è minore, o maggiore o congruo al secondo, la somma del primo col terzo sarà minore, o maggiore, o congrua alla somma del secondo col terzo ». [Invero — posto $M = A|C$ e $D = B|M$ — l'inquadratura risp. al punto M converte $|AC|$ in sè stesso e permuta l'uno con l'altro i segmenti $|AB|$ e $|CD|$, $|BC|$ e $|DA|$: onde $|AD| \simeq \beta$, $|DC| \simeq \alpha$; e p. o. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. — Di poi, se p. es. $\alpha > \beta$ e sia γ un segmento arbitrario, si scelgano i punti D, A, B in maniera, che $|DA| \simeq \gamma$, $|AB| \simeq \alpha$, con A e $|DB|$: allora fra A e B ci dovrà essere un punto C, per cui $|AC| \simeq \beta$ (P 1, 2). Ma un tale punto è obbligato a giacere eziandio fra D e B (P 19 § 3), anzi in modo che A e $|DC|$ (P 17 § 3): dunque il segmento $|DB|$, somma di γ con α (P 25), è maggiore del segmento $|DC|$, somma di γ con β . Ecc.].

P 27 — *Tr.* La somma di due lati d'un triangolo, presi in qualsivoglia modo, è sempre maggiore del lato rimanente *. *Eucl.*, lib. 1°, prp. XX. — O, in altri termini: * Purchè A, B, C siano punti non collineari, sarà maggior di $|BC|$ qualunque segmento, che equivalga alla somma dei due segmenti $|BA|$, $|AC|$ *. Ved. P 25. [La nota dms. Euclidian riposa — oltre che in P 25 — sulle P 37 § 3 e P 12, 16, 21, 24].

P 28 — *Tr.* * E se D sia punto interno al triangolo $|ABC|$, i segmenti $|BD|$, $|DC|$ daranno una somma minore della somma dei lati $|BA|$, $|AC|$ del triangolo, * ma conterranno un angolo maggiore: cioè \hat{D} . $\angle BDC$ sarà sempre maggior di \hat{A} . $\angle BAC$ *. *Eucl.*, lib. 1°, prp. XXI [Dove occorron le P 51 § 3 e P 16, 19, 25, 26 27]. — Che esista un triangolo, i lati del quale sian congrui a tre dati segmenti, ciascuno minor della somma degli altri due, si dimostra più tardi (ved. P § 6): benchè l'esistenza d'una terna (X, Y, Z) di punti soggetti alla condizione, che i segmenti $|XY|$, $|XZ|$, $|YZ|$ sian tutti congrui a un dato segmento $|AB|$ — oppure tali, che $|XY|$ e $|XZ|$ sian congrui ad $|AB|$, ma $|YZ|$ congruo ad un altro segmento minore del doppio di $|AB|$ — è già fuor di questione, dopo le P 25 § 3 e P 11 (*).

P 29 — *Tr.* * Sia D il piede della normale abbassata dal punto A alla retta $\cdot BC$ (sempre che gli A, B, C siano punti non collineari): se avrarrà che il segmento $\cdot DB$, sia minor del segmento $|DC|$, sarà inoltre $|AB|$ minore di $|AC|$. E, viceversa, * non potrà essere $|AB|$ minore di $|AC|$, se non è anche $|DB|$ minor che $|DC|$ *. *LEONDEE, Elementi*, lib. 1°, prp. XVI. [Supposto che B non giaccia in $\cdot CD$], siano A' e B' i simmetrici di A e B rispetto a D. Il punto B' è interno a $\cdot CD$ (P 4, ecc.), quindi interno al triangolo $|CAA'|$ (P 51 § 8). Dunque $|AA'|$ minor che la somma di $|AB'|$ con $|B'A'|$ (P 27); e questa minor di qualunque segmento, che spetti alla somma di $|AC|$ con $|CA'|$ (P 25, 28). Ora, poichè i segmenti $|AB'|$ e $|B'A'|$ sono congrui fra loro, o congrui del pari i segmenti $|AC|$ e $|CA'|$ (P 7 § 2, P 31 § 4, ecc.), si può invocare la P 14 § 4 e concluder che $|AB'| < |AC|$ (P 1, 2, ecc.) — Il resto al Lettore.]

P 30 — *Tr.* * Se A, B, C sono punti, e C spetta alla sfera B_* , qualunque punto che giaccia fra B e C sarà interno alla sfera; e, viceversa, ogni punto \cdot interno alla sfera e allineato sopra due punti B e C della sfera, non coincidenti \cdot fra loro, sarà interno al segmento $|BC|$ *. *Eucl.*, lib. 3°, prp. II. [Sia per es. D un punto fra B e C (onde $B \sim C$) ed $M \equiv B/C$. Se $M \equiv A$, si ritorna a P 4, 10 § 3. Ma se M è diverso da A, la retta MA sarà perpendicolare alla retta BC (P 5, 6 § 2); per la qual cosa $|MD| < |MB|$ ovvero $|MD| < |MC|$, secondo che D giacerà nel segmento $|MB|$ o nel segmento $|MC|$ (P 11, 19 § 3, P 1): dunque (P 29) $|AD|$ minore di $|AB|$, ovvero di $|AC|$, che è lo stesso (P 1); e per cons. D interno alla sfera (P 6). — Appresso, se il punto E per es. sarà allineato coi punti B e C, oltre che interno alla sfera B_* , sappiamo che $|AE| < |AB|$ (P 6), e per conseguenza $|ME| < |MB|$ (P 29): dunque E interno a B_* (P 6), dunque interno a $|BC|$ (P 10 § 3). — E di qui si deduce, avuto riguardo a P 21 § 3 e P 8:

(*) È noto che questi fatti, in quanto dipendono dall'esistenza di punti comuni a due cerchi, sono imperfettamente provati nel testo Euclideo, quale ci è pervenuto. Ved. le prp. I e XXII del lib. 1°.

P 31 — *Tr.* — Il segmento che unisce due punti interni alla sfera sarà tutto interno *. Cfr. P 53 § 3.

P 32 — *Tr.* — Se due triangoli hanno due lati congrui a due lati, l'uno all'altro, ma gli angoli compresi da questi lati non son congruenti, il terzo lato sarà maggior nel triangolo, dove l'angolo è maggiore *. *Eucl.*, lib. 1°, prp. XXIV.

P 33 — *Tr.* — E se due triangoli hanno due lati congrui a due lati, l'uno all'altro, ma i rimanenti lati non congrui, l'angolo compreso dai lati congrui sarà maggior nel triangolo, dove il terzo lato è maggiore *. *Eucl.*, lib. 1°, prp. XXV.

P 34 — *Df.* — Ogni qualvolta — essendo α, β due angoli piani convessi — si costruiscono gli angoli $\hat{O}.AB, \hat{O}.BC$, congrui rispettiv. agli angoli dati α e β , sotto condizione che il punto C sia nel piano dei punti non collineari O, A, B, ma fuori del semipiano da OB verso A; allora il nome comune di « somma dell'angolo α con l'angolo β », o « somma degli α, β », o « $\alpha + \beta$ » spetta: 1) a ciascun angolo congruo ad $\hat{O}.AC$, ovvero ad $\hat{O}.AC$, se i punti B e C giaceranno dalla stessa banda di OA, ovvero da bande opposte; 2) a qualsivoglia semipiano, se C cadrà sulla retta OA (che è quanto dir sul prolungamento di OA oltre O). Ved. P 39, 45, 47 § 3 e P 39, 41 § 4 *. — Cfr. P 25. — Anche qui converrà far notare che (una volta assegnati α e β): « comunque si prendano i punti O', A', B', C' (sotto condizione ecc. ecc.) l'angolo $\hat{O}'.A'C'$ risulterà sempre congruo ad $\hat{O}.AC$ »: in quanto l'isomeria che trasforma i raggi OA e OB nei raggi O'A' e O'B' (P 37, 44, 43 § 4), mnti OC in un raggio, il quale non può non coincider col raggio O'C', data la P 45 § 4.

P 35 — *Tr.* — Sotto la stessa Ipts., tanto è sommare α e β , quanto sommar β ed α . E se di tre angoli piani convessi il primo è minore, o maggiore, o congruo al secondo, la somma del primo col terzo sarà minore, o maggiore, o congrua alla somma del secondo col terzo *. — Cfr. P 26 [Invero — supposto che i punti O, A, C non collimino, e dotta OM la bisettrice dell'angolo $\hat{O}.AC$ (o dell'angolo $\hat{O}.AC$) che rappresenta la somma di α con β (P 48 § 4) — il semigiro, intorno alla retta OM convertito in sè stesso quell'angolo; dunque muta il raggio OB in un altro OD, esiando contenuto dall'angolo, permutando l'uno con l'altro $\hat{O}.AB$ e $\hat{O}.CD$, come pure $\hat{O}.BC$ e $\hat{O}.DA$: sicchè $\hat{O}.AD \simeq \beta$, $\hat{O}.DC \simeq \alpha$. Ma i punti A e C, come giacciono da bande opposte di OB per Ipts., saranno ancora da bande opposte di OD: onde $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. — Il resto al Lettore].

P 36 — *Tr.* — Ciascun angolo, i lati del quale facciano con un raggio interno (uscendo dal vertice) angoli congrui rispettiv. ad angoli dati convessi α e β , sarà « somma di questi ».

§ 6.

Parallelismo di rette o piani. Omotetia e traslazione. Proprietà e costruzione delle similitudini. Antinversione rispetto a una sfera. Inversione di due sfere.

P 1 — *Tr.* — Se non esiste alcun punto comune a due date rette giacenti in un medesimo piano, qualunque retta normale ad una di esse e giacente nel comun

« piano sarà perpendicolare anche all'altra ». [Le due rette che non s'incontrano siano p. es. r, s ; e nel loro piano sia data una terza retta p normale ad r . Sella p esiste per certo un punto — e sia p. es. A — straniero ad ambo le rette r, s ; poi che quella è diversa da ognuna di queste (P 5 § 2) e però non la incontra più d'una volta. Dunque i simmetrici del punto A rispetto alle rette r, s sono diversi da A (P 49 § 1): sicchè — posto $A' = A/r, A'' = A/s$ — bisognerà che la retta AA' coincida con p (P 7 § 2) e che la AA'' sia normale ad s (P 54 § 1, P 5 § 2): cioè la r perpendicolare alla coppia (A, A') nel suo punto medio, e così la s alla coppia (A', A'') . Or, se le rette AA' e AA'' non coincidessero fra loro, esisterebbe nel piano Ar qualche punto equidistante da ognuna degli A, A', A'' (P 12 § 4) e p. com. comune alle rette r, s (P 11, 15 § 2): contro l'ipotesi. — E di qui — presenti le P 46 § 1 e P 45 § 2 — sarà manifesto che:

P 2 — Tr. « Due rette, le quali sian complanari ma non concorrenti, sono sempre simmetriche l'una dell'altra per equinversione: centro di simmetria il punto medio fra i piedi d'ogni qualunque perpendicolare comune ».

P 3 — Tr. « E, viceversa, due rette simmetriche l'una dell'altra risp. ad un punto (e perciò complanari) non si potranno incontrare, se non coincidono ». [In questa ipotesi il centro di simmetria sarà escluso da ognuna delle due rette (P 46 § 1); per la qual cosa, se queste avessero un punto a comune, s'incontrerebbero di nuovo nel punto simmetrico: onde avrebbero due punti a comune l'un l'altro distinti (P 45 § 1): contro P 19 § 1].

P 4 — Df. « Parallela a una retta data » significa « retta che non incontra la data, pur giacendo con essa in un piano ». In altri termini: son « parallelo » fra loro due rette, allora che giacciono sopra un medesimo piano senza incontrarsi; « non parallelo » quando s'incontrano (potendo anche coincidere), ovvero non giacciono sopra un medesimo piano. (Dov'è già sottinteso il giudizio che « se una retta è parallela ad un'altra, questa è, alla sua volta, parallela alla prima »). E — grazie alle P 2, 3 — potremmo anche dire: Parallela a una retta data significa « retta simmetrica alla data rispetto ad un punto, che non le appartiene ». — Sarà manifesto eziandio (P 45 § 3), che « ogni qualvolta due rette son parallele fra loro, ciascuna di esse è obbligata a giacer tutta quanta da una medesima banda dell'altra ».

P 5 — Tr. « Se due rette son parallele fra loro, comunque si scelga un punto sull'una e un punto sull'altra, saranno sempre simmetriche l'una dell'altra rispetto al centro d'una tal coppia di punti ». [Invero — detti R, S i due punti — l'equinversione rispetto al punto $R|S$, in quanto rispecchia su sè medesima la perpendicolare tirata da questo punto alle due parallele r, s (P 1, 4, ecc.), e scambia R, S fra loro, dovrà permutare eziandio le r, s (P 6, 9, 11, 45 § 2).]

P 6 — Tr. « Essendo dati una retta e un punto fuori di essa, per questo punto passerà sempre una retta parallela alla data: ma due rette, che ognuna sia parallela alla data, non possono coesistere senza coincidere ». [Sopra la retta data — sia p. es. r — tolgasi un punto A a piacere: il punto dato sia p. es. B . L'equinversione rispetto al punto $A|B$ fa corrispondere ad r una certa retta s , che è parallela ad r (P 3, 4) e passa per B . Nè può darvi che un'altra retta diversa da quella,

ma concorrente in B, sia parallela ad r : perchè, rispetto a quel punto A(B P 5), una sola è la retta simmetrica della retta data.] — Ne viene che:

P 7 — Tr. « Se due rette son parallele fra loro, qualunque retta che ne tagli una, e giaccia nel comun piano, dovrà tagliare anche l'altra ».

P 8 — Tr. « E se due parallele r, s siano tagliate da un'altra coppia di parallele u, v , il punto medio fra i punti dove le u, v ne incontrano ordinatamente la r, s , coinciderà col punto medio fra le intersezioni di u, v con s, r ». — Insomma: « Le diagonali d'un parallelogrammo si tagliano scambievolmente per metà; onde i lati e gli angoli opposti saranno congrui fra loro e simmetrici ». EUCL., lib. 1°, prp. XXXIV.

P 9 — Tr. « I segmenti che uniscono dalle medesime parti gli estremi di segmenti congrui e paralleli fra loro, sono anch'essi congrui e paralleli ». EUCL., lib. 1°, prp. XXXIII. — O, in altri termini: « Se — essendo gli A, B, C, D punti al tutto diversi fra loro — i segmenti |AC| e |BD| siano congrui l'un l'altro, e di più paralleli e (salvo A e B) giacenti dalla stessa banda di AB; così anche |CD| sarà congruo e parallelo ad |AB| ». [Poi che le rette AC e BD son parallele fra loro in Iptis, e C è fuor della AB (P 45 § 3), la retta che passa da questo punto ed è parallela ad AB taglierà BD in un punto (P 4) — sia p. es. E — che dee giacere su |BD| (P 43-45 § 3); inoltre la coppia (B, E) sarà congruente ad (A, C) (P 8) e p. c. (B, E) \simeq (B, D) (P 32 § 4). Ma da ciò si deduce che E = D, come notammo altre volte. Ecc., ecc.]

P 10 Tr. « Se si prolunga un lato di qualsivoglia triangolo, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due interni opposti. Ved. P 34 § 4 ». EUCL., lib. 1°, prp. XXXII. — In altri termini: « Essendo A, B, C tre punti non collineari e D un punto nell'ombra di B da A (B eccettuato); l'angolo \hat{B} .CD equivale alla somma degli angoli \hat{A} .BC e \hat{C} .AB. Ved. P 29 § 3 e P 34 § 5 ». [Posto $M = B|C$, $E = A|M$, l'inversione rispetto ad M converte l'uno nell'altro i due raggi |CA| e |BE, come pure i due raggi |CB| e |BC, i segmenti |AB| ed |EC|, e p. cons. anche gli angoli \hat{C} .AB e \hat{B} .EC (P 47 § 3, ecc.) Al modo stesso — in virtù delle simmetrie rispetto ai punti A|B e B (P 36, 38 § 4) — saranno congrui fra loro anche gli angoli \hat{A} .BC e \hat{B} .AF (P 5), \hat{B} .AF e \hat{B} .DE: F essendo un punto arbitrario dell'ombra di B da E, pur che diverso da B. Dunque congrui fra loro anche gli angoli \hat{A} .BC e \hat{B} .DE. D'altra parte la retta BE, passando fra i punti A e D senza incontrar la CA (P 3), dovrà passar fra C e D (P 13 § 3); e però questi punti C e D giaceranno da bande opposte rispetto a BE; mentre ambo i punti D ed E sono immersi nell'ombra, che BC proietta da A (P 38, 39 § 3). Onde basta appellarsi a P 34 § 5].

P 11 — Tr. « Due rette normali a un medesimo piano son parallele fra loro, se ne coincidono. E se due rette son parallele fra loro, qualunque piano perpendicolare ad una di esse è normale anche all'altra ». EUCL., lib. 11°, prp. VI e VIII. [1] Se il piano incontra quelle due rette nei punti R, S, la simmetria rispetto al punto R|S converte in sé stesso il piano, e scambia le due perpendicolari fra loro (P 46 § 1, P 33, 45 § 2). — 2) Se un piano π è normale ad una delle due rette r, s parallele fra loro — p. es. normale alla s nel punto S — allora il piano π taglia π lungo una retta RS, che incontra r in un certo punto R (P 37 § 2, P 4, 7): e l'inversione rispetto al punto R|S permuta r con s (P 5) tenendo fermo π . Ecc.]

P 12 — Tr. « Due rette parallele ad una medesima retta, che non siano con questa nel medesimo piano, sono altresì parallele fra loro ». EUCL., lib. 11°, prp. IX. [Perchè un piano perpendicolare ad una qualunque di esse (P 35 § 2) è normale a ciascuna (P 11)].

P 13 — Tr. « Due piani diversi perpendicolari sì l'uno che l'altro a una medesima retta non si potranno incontrare. E se, viceversa, due piani non hanno alcun punto a comune, qualunque retta perpendicolare ad uno di essi è normale anche all'altro ». Cfr. P 1. — [La prima parte è conseguenza immediata delle P 9, 35 § 2; e il resto si prova come P 1, richiamandosi principalmente a P 38 § 2 e P 12 § 4].

P 14 — Tr. « Per due piani diversi, il non avere alcun punto a comune, o l'esser simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad un punto, son condizioni equivalenti ». Cfr. P 2, 3.

P 15 — Df. « Due piani son da chiamar *'paralleli fra loro'* quando non hanno alcun punto a comune: ovver, che è lo stesso (P 14), quando l'uno è simmetrico all'altro rispetto a qualche punto esterno ». Cfr. P 4. — E però ciascuno di essi è obbligato a giacer tutto quanto da una medesima banda dell'altro (P 46 § 3).

P 16 — Tr. « Ogni qualvolta due piani son paralleli fra loro, e siano presi a piacere un punto sull'uno e un punto sull'altro piano, il centro di questa coppia di punti sarà un centro di simmetria per quei piani ». Cfr. P 5.

P 17 — Tr. « Esiste sempre un piano che passa da un punto dato ed è parallelo ad un piano dato, cui non appartenga il punto. Ma due piani, paralleli sì l'uno che l'altro a un medesimo piano, son paralleli fra loro o coincidono ». Cfr. P 6.

P 18 — Tr. « Se due piani son paralleli fra loro, qualunque piano che tagli uno di essi, taglierà l'altro ancora, e le intersezioni saranno rette parallele. E similmente ogni retta, la quale attraversi un de' piani, deve incontrare anche l'altro ». Cfr. P 7. EUCL., lib. 11°, prp. XVI.

P 19 — Tr. « Se due rette che s'incontrano sono parallele a due altre rette che s'incontrano, anche il piano che passa per le prime sarà parallelo al piano delle altre, se però non coincide con questo ». EUCL., lib. 11°, prp. XV. [Dette r, s le une ed r', s' le altre, la simmetria rispetto al punto medio fra i punti r, s ed r', s' permuta r con r' ed s con s' (P 5), dunque anche il piano rs col piano $r's'$].

P 20 — Df. « Una retta è *'parallela ad un piano'* — e un piano è *'parallelo a una retta'* — allorchè nessun punto è comune alla retta ed al piano ». Cfr. P 4, 15. — Dunque una retta sarà parallela ad un piano, se è parallela a qualche retta di questo piano, senza giacere essa stessa nel piano. Ecc., ecc.

P 21 — Tr. « Le rette che passan da un punto dato e son parallele a un medesimo piano sono tutte dalla stessa banda di questo, e giaccion tutte in un piano ».

P 22 — Tr. « Premesso che A, B, C siano punti non collineari e così A', B', C'; se avremo che le rette AB, BC, CA sian parallele ordinatamente alle rette A'B', B'C', C'A', tutte e tre le congiungenti AA', BB' e CC' concorreranno in un punto, o saranno parallele fra loro ». [L'Iptà, esclude che posan coincidere i punti A ed

A', ovvero B e B', o C e C'; ed implica inoltre, che quelle tre congiungenti siano diverse fra loro (P 19 § 1, P 4). Ora poniamo anzitutto che i piani ABC e A'B'C non coincidano. Poi che le rette AA' e BB' giacciono insieme sul piano delle parallele AB e A'B', si taglieranno in un punto, o saranno parallele fra loro (P 2, 4). Ma nell'un caso la CC' essendo in un piano con AA' e in un piano con BB', e non potendo tagliar queste rette in punti diversi, nè incontrare una sola di esse (P 35, 36 § 1, P 4 ecc.), bisognerà che le incontri ambedue nel loro punto comune: e, nell'altro caso, questa medesima argomentazione prova che la CC' non incontra nessuna delle AA' e BB'. — Di poi supporremo che i punti A, B, C, A', B', C' siano tutti in un piano: e qui pur si distinguon due casi. In primo luogo le rette AA' e BB' potranno tagliarsi in un punto: e sia p. es. O. Fuori del comun piano ABC tolgasi allora un punto S a piacere (P 16 § 2); e sulle SA, SB due punti A'' e B'' diversi l'un l'altro e tali, che la lor congiungente sia parallela ad AB (P 41, 42 § 1: P 4, 6): la parallela tirata da questi punti alle rette AC e BC si taglieranno in un punto (P 17, 21, 12) — sia p. es. C'' — che dee giacer sulla retta SC, per ciò che abbiain detto innanzi. Per la stessa ragione anche le rette A'A'', B'B'' e C'C'' concorreranno in un certo punto T (diverso da S), se per altro non sian tutte e tre parallele fra loro: onde la retta ST nell'un caso — e quella che passa dal punto S, ed è parallela alla A'A'' nell'altro — sarà comune ai tre piani AA'A'', BB'B'', CC'C'', e passerà per O, poi che vi passano i piani AA'A'' e BB'B''. Dunque O è comune ai due piani ABC e CC'C'', e p. cons. appartiene alla retta CC'. Resta che le AA' e BB' sian parallele fra loro. In questa lpt. e fuori del comun piano si scelgano i punti A'', B'' e C'' in maniera, che le due rette AA'' e BB'' sian parallele fra loro, e le A''B'', B''C'', C''A'' alle AB, BC, CA rispettivamente: onde, per dimostrato, anche CC'' sarà parallela ad AA''; e così parallele fra loro le rette A'A'', B'B'' e C'C'', dal momento che son paralleli i due piani AA'A'' e BB'B'' (P 19), sicchè le A'A'' e B'B'' non si potranno incontrare. Dunque saranno caindie paralleli i due piani AA'A'' e CC'C'' (P 19), e parallele per cons. le tracce di questi piani sul piano ABC (P 18), che son le rette AA' e CC'.]

P 23 — Tr. « E, reciprocamente, qualunque volta succede che tutte e tre le AA', BB' e CC' concorrano in un un medesimo punto, oppur sian tutte e tre parallele fra loro; se inoltre le AB, BC saranno parallele alle A'B' e B'C', bisognerà che le rimanenti AC ed A'C' siano anch'esse parallele fra loro ».

P 24 — Tr. « In qualsivoglia triangolo, la retta che unisce i punti medi di due lati, è parallela al terzo lato ». Orvero: « Se A, B, C sono punti non collineari, la congiungente i punti A/B e B/C sarà parallela alla retta CA ». [Posto $M = A/B$, $N = B/C$, $D = C/M$, $E = M/N$; le rette BC, CE, EB sono ordinatamente parallele alle DA, AM, MD (P 4): e poi che inoltre la retta AC è parallela alla retta BD, saranno ambedue parallele alla retta ME, grazie a $\left(\begin{smallmatrix} D, M, C, B, E \\ B, C, A, N, C' \end{smallmatrix} \right)$ P 22.] —

Di qui e dalle P 22, 8 si deduce ad os. che:

P 25 — Tr. « Le tre mediane di qualsivoglia triangolo concorron sempre in un punto ».

P 26 — Tr. « Se un punto C, diverso dai punti A e B, dista dal punto medio

« di A e B quanto A, le rette AC e BC saranno perpendicolari fra loro ». Ossia:
 « L'angolo inscritto nel semicerchio è retto ». EUCL., lib. 3°. prp. XXXI.
 [Per Ipt. i punti A, B, C non collimano (P 8, 43, 44 § 1, ecc.); e la retta che unisce
 il punto A) B col punto A) C, sarà perpendicolare alla retta CA (P 3-5 § 2) e paral-
 lela alla retta BC (P 24); onde basta appellarsi alle P 1, 4].

P 27 — Tr. « E viceversa ogni punto L, per cui le rette LA, LB siano in po-
 sizione ortogonale (sempre che i punti A, B, L non collimino) giacerà sulla polo-
 sfera di A e B. Ved. P 4 § 3 ».

P 28 — Df. « Qualunque retta O, A, A' sian punti collineari e al tutto diversi
 « fra loro, si chiamerà "emetetia di A in A', rispetto ad O come centro" —

« o, più brevemente, $\left\{ O \begin{smallmatrix} A \\ A' \end{smallmatrix} \right\}$ — la corrispondenza definita mercè le seguenti operazioni »:

1) Al punto O si dia per 'immagine' O, e al punto A il punto A'. 2) Se B è un
 punto arbitrario, ma esterno alla retta OA, dicasi 'omologo' di B quel punto
 B', dove la retta OB s'incontra con la parallela tirata dal punto A' alla congiun-
 gente A con B. 3) Se C è un punto diverso da O ed A, ma appartenente ad OA;
 si osservi anzi tutto che il punto C', dove questa retta s'incontra con la parallela
 dal punto B' alla retta BC, non dipende da B, ma sì veramente dai punti O, A,
 A', C, che bastano a determinarlo. Ivero, se in luogo del punto B togliamo un
 punto D a piacere, ma fuor delle rette OA, OB, l'omologo del punto D — sia p.
 es. D' — cadrà come dianzi all'intersezione di OD con A'D', parallela ad AD; e
 la retta B'D' n'uscirà parallela a BD, giusta $\left(\begin{smallmatrix} B, A, D, B', A', D' \\ A, B, C, A', B', C' \end{smallmatrix} \right)$ P 23, e per ugual

modo C'D' parallela a CD, grazie a $\left(\begin{smallmatrix} D, A' \\ A, A' \end{smallmatrix} \right)$ P 23. Nè diversamente accadrebbe se
 a far le voci del punto B, o D, si togliesse un punto E qualsivoglia di OB (sol
 che diverso da O): poi che il fatto delle AD, AE parallele rispettivamente alle
 A'D', A'E' involgerà nella stessa maniera che DE sia parallela a D'E'; e però dal-
 l'essere le CD, DE parallele rispettivamente alle C'D', D'E' nascerà che la E'C' è
 parallela ad EC. Il punto C', a cui fa capo ciascuna delle costruzioni qui men-
 torate, è dunque subordinato univocamente a C: e noi le torremo ad 'immagine'
 o 'corrispondente' di C. — Emerge dalle costruzioni suddette, che l'emetetia
 di A in A' rispetto ad O è una trasformazione univoca e reciproca dei
 punti in punti (come le equiversioni, le rotazioni, ecc.): in quanto che ciascun
 punto P è l'immagine di qualche punto P, e punti diversi hanno sempre diverso im-
 magini. E la trasformazione inversa di un'emetetia qualsivoglia è di nuove un'o-
 metetia: per es. di $\left\{ O \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ l'inversa è precisamente $\left\{ O \begin{smallmatrix} A \\ A' \end{smallmatrix} \right\}$. Ecc.

P 29 — Tr. « Ferme stanti le Ipt. e le notazioni precedenti, l'emetetia $\left\{ O \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$

« non si distingue dalle emetetie $\left\{ O \begin{smallmatrix} B' \\ B \end{smallmatrix} \right\}$ e $\left\{ O \begin{smallmatrix} C' \\ C \end{smallmatrix} \right\}$. Essa non ha 'punti uniti', dal

« e centre in fuori; ma rappresenta in sé stessa $\frac{A}{O}$ ogni retta e ogni piano che passi per

- questo punto. A qualsiasi retta o piano, che non ne contenga il centro, coordina
- sempre una retta ed un piano, che è parallelo¹_O a quell'²_O. Se il centro giace fra
- i punti A ed A', allora due punti omologhi quali che siano giacciono sempre da
- bande opposte rispetto al centro: se coincide col punto medio di A e A', l'omotetia
- $\left\{ \begin{smallmatrix} O \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ si confonde con la simmetria rispetto ad O. Ecc. .

P 30 — Tr. • Qualsivoglia omotetia è in pari tempo una similitudine.
 • Ved. P 1 § 4 •. [Premessa ancora l'Ipt. di P 28 in ordine ai punti O, A, A' e
 posto per brevità $O = \left\{ \begin{smallmatrix} O \\ A \end{smallmatrix} \right\}$; basterà dimostrare, che se due punti P e Q sono egual-

mente distanti da un terzo, p. es. da A, e tutti e tre diversi fra loro, anche gli omologhi OP, OQ — vale a dire P' e Q' — distano egualmente da A'. In primo luogo suppongo i punti A, P, Q per diritto: onde $A = P/Q$. Allora, presi a piacere fuor della retta PQ due punti simmetrici rispetto ad A — siano questi R, S — e posto $R' = OR, S' = OS$, bisognerà che le rette PR' e QS' sian parallele fra loro, come son le PR e QS (P 4); poichè PR sarà parallela alla propria immagine PR', seppur non coincide con questa (P 29), e così anche QS rispetto a QS'. Per egual modo saranno eziandio parallele fra loro le rette QR' e PS'. Dunque le rette PQ' ed RS', corrispondenti a PQ ed RS, si taglieranno scambievolmente nel punto medio fra i punti P' e Q' (P 8); e il loro punto comune sarà il punto A', dal momento che le PQ ed RS si tagliano in A. — Di poi, supposti non collineari A, P, Q, sia π il piano polare alla coppia (P, Q) (P 38 § 2). Questo piano contiene per certo A (ivi), ed è in pari tempo normale alla retta PQ', parallela od eguale a PQ (P 18, 15, 29): per la qual cosa anche il piano π' , che corrisponde a π , dev'esser normale a PQ'; visto che i piani π ed $O\pi$ son paralleli fra loro o coincidono. D'altra parte il piano π' contiene, oltre A', anche il punto che corrisponde a P/Q; vale a dire — come si è già dimostrato — il punto P'/Q': dunque la sfera P', passerà per Q' (P 38 § 2).

P 31 — Tr. • Due distinte similitudini, e non più di due, son capaci di • trasformare una terna di punti non collineari A, B, C, tutto che dati ad arbitrio, • in tre punti non collineari A', B', C', dati questi in maniera che gli angoli $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{A'}, \hat{B'}, \hat{C'}$ sian congrui ordinatamente con gli angoli $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{A'}, \hat{B'}, \hat{C'}$.
 • Ved. P 36 § 4 •. [Per Ipt. esiste un'isomeria che si lati |AB ed |AC di $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ subordini i lati |A'B' e |A'C' di $\hat{A'}, \hat{B'}, \hat{C'}$ (P 44 § 4); quindi fa corrispondere A' ad A (P 41 § 4), e rispecchia B e C in due punti B₁ e C₁, che spettano ai raggi |A'B' e |A'C', ma son diversi da A': sia per es. \mathcal{A} . Ora gli angoli $\hat{B'}, \hat{A'}, \hat{C'}$ o $\hat{B}_1, \hat{A'}, \hat{C}_1$ sono congrui fra loro (P 37 § 4): per la qual cosa — supposto il punto B₁ diverso dal punto B' — le rette B'C' e B₁C₁ non si potranno incontrare (P 19 § 5). Dunque l'omotetia $\left\{ \begin{smallmatrix} O \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ — che s'indica pur con O — rappresenta ordinatamente gli A', B₁, C₁

con gli A', B', C' (P 4, 6, 28). Dunque il prodotto delle similitudini \mathcal{A} ed O (P 36 § 4, P 30) è una similitudine (P 2 § 4), che trasforma A, B, C rispettiv. in A', B', C'. — Appresso — posto per brevità $\mathcal{S} = O\mathcal{A}$, e chiamando \mathcal{S} ed \mathcal{S}' gli specchiamenti

nei piani ABC e $A'B'C'$ — sia per. es. $\mathcal{O}K$ una similitudine, che al pari della precedente \mathcal{L} snordini i punti A', B', C' ai punti A, B, C . Dunque la similitudine $\mathcal{L}\mathcal{O}K$ (P 2 § 4) terrà fermo ciascuno dei punti non collineari A, B, C ; e per conseguenza $\mathcal{L}\mathcal{O}K = 1$, oppure $\mathcal{L}\mathcal{O}K = \mathcal{L}$ (P 23 § 4): che è quanto dire $\mathcal{O}K = \mathcal{L}$, oppure $\mathcal{O}K = \mathcal{L}\mathcal{L}$. Si conclude, che ogni qualunque similitudine capace di rappresentare A, B, C con A', B', C' si confonde di necessità con \mathcal{L} , o con $\mathcal{L}\mathcal{L}$. D'altra parte anche la similitudine $\mathcal{O}K\mathcal{L}$, in quanto non altera i punti A', B', C' , si confonde con \mathcal{L} , o con la trasformazione identica: onde $\mathcal{L}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{L}$. Pertanto le due similitudini capaci ecc., ecc., saranno la precedente $\mathcal{O}\mathcal{L}$ e quella che nasce, ove alla stessa $\mathcal{O}\mathcal{L}$ si faccia preceder lo specchiamento nel piano ABC , o seguire lo specchiamento nel piano $A'B'C'$. — Abbiamo, è vero, supposto $B, \sim = B'$; ma il Tr. sussiste ancorchè questi punti coincidano: essendo allora $\mathcal{O}K = \mathcal{L}$, ovvero $\mathcal{O}K = \mathcal{L}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{L}$. Osservate che, se $A = A' = B|B' = C|C'$, avremo appunto $\mathcal{O}K = \mathcal{L}$, ovvero $\mathcal{O}K = \mathcal{L}\mathcal{L}$: dove \mathcal{L} può togliersi eguale ad A . In questo caso le due similitudini sono l'inversione rispetto ad A , e il semigiro intorno alla retta perpendicolare in A al piano ABC (come ognun può vedere). — La *prpa.* seguente ha ufficio di Lemma rispetto al Tr. che viene appresso.

P 32 — Tr. « Gli angoli alla base di un triangolo rettangolo e isoscele sono congrui con gli angoli alla base di qualsivoglia triangolo rettangolo e isoscele ».

O, sotto altra forma: « Se, essendo $\begin{matrix} D, E, F \\ A, B, C \end{matrix}$ tre punti non collineari, la retta $\begin{matrix} D, E \\ A, B \end{matrix}$

sia normale alla retta $\begin{matrix} DF \\ AC \end{matrix}$, mentre il punto $\begin{matrix} F \\ C \end{matrix}$ dista da $\begin{matrix} D \\ A \end{matrix}$ quanto $\begin{matrix} E \\ B \end{matrix}$; si dimostra,

che gli angoli \hat{B}, AC, \hat{E}, DF sono congrui fra loro ». [Presi i punti $M = B|C$, $N = E|F$, $P = A|M$, $Q = D|N$, le rette BP, EQ n'esciranno parallele alle rette AC e DF (P 4) e perpendicolari alle AB, DE (P 1, 3); inoltre BC sarà perpendicolare ad AM (P 5 § 2): premesso che il punto M è diverso da A , e i punti P e Q son diversi da B ed E . Per certo esiste un'isomeria che traduce E in B , il raggio E verso D sul raggio B verso A e il semipiano ED verso F sul semipiano BA verso C (P 39 § 4): dunque il raggio EQ sul raggio BP — a motivo di P 11 § 2, P 3, 36 § 4, e visto che i punti P e Q giaceranno negli angoli \hat{A}, BC e \hat{D}, EF , e per cons. nei semipiani $|(AB)C$ e $|(DE)F$ (P 47, 49 § 3) — e i punti D e Q in due punti D' e Q' egualmente distanti da B , sui raggi $|BA$ e $|BP$. Ora, per simmetria rispetto alla retta BC si scambian fra loro A e P , come pure $|BA$ e $|BP$, mentre la sfera D si converte in se stessa (P 50 § 1): onde il punto Q' , dove questa è tagliata dal raggio $|BP$ (P 37 § 3), sarà il punto che corrisponde a D' . Ne viene che il punto $D'|Q'$ — ossia l'immagine del punto N in virtù dell'isomeria precedente — appartiene al raggio $|BC$ (P 54 § 1, ecc.): e che pertanto quell'isomeria porta il raggio $|EF$ sul raggio $|BC$ e l'angolo \hat{E}, DF a coincider coll'angolo \hat{B}, AC (P 48 § 3).]

P 33 — Tr. « Qualesivoglia similitudine, se già non è isomeria, sarà equivalente al prodotto di un'isomeria preceduta o (come più aggrada) seguita da un'omotetia ». [Invero, data una similitudine $\mathcal{O}K$ ad arbitrio, e presi i punti

non collineari A, B, C sotto condizione che AC sia perpendicolare ad AB e C disti da A quanto B , com'è sempre possibile (P 25 § 1, P 14, 20 § 2); questi punti saranno da $\mathcal{O}\mathcal{K}$ convertiti in A', B', C' essandio non collineari, per modo che $A'C' \perp A'B'$ o $C' \perp B'$ (P 1, 3 § 4): la qual cosa farà che gli angoli $\hat{B}, \hat{AC}, \hat{B'}$, $\hat{A'C'}$ siano congrui fra loro (P 32). Analogamente $\hat{C}, \hat{AB} \simeq \hat{C'}, \hat{A'B'}$. Ma di qui si deduce, grazie a P 31 e supposto che la figura (A, B, C) non sia congruente ad (A', B', C') :

$$\mathcal{O}\mathcal{K} = \mathcal{O}\mathcal{J}, \text{ oppure } \mathcal{O}\mathcal{K} = \mathcal{O}\mathcal{S},$$

le $\mathcal{O}, \mathcal{J}, \mathcal{S}$ avendo il medesimo significato che in P 31; laddove, se $(A, B, C) \simeq (A', B', C')$, si deduce:

$$\mathcal{O}\mathcal{K} = \mathcal{J}, \text{ oppure } \mathcal{O}\mathcal{K} = \mathcal{S};$$

cosicchè, se la data similitudine $\mathcal{O}\mathcal{K}$ non è isomeria, sarà certamente il prodotto di un'isomeria susseguita da un'omotetia (P 37, 38 § 4). D'altra parte il prodotto $\mathcal{O}\mathcal{J}$ ha i caratteri dell'omotetia (P 28) come ognun può vedere; anzi eguaglia precisamente $\left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B \end{smallmatrix} \right\}$, se B' denoti il punto $\mathcal{O}\mathcal{J}B$: e il simile potrebbe dirsi di $(\mathcal{S})\mathcal{O}\mathcal{S}$.

Perciò, dopo aver posto $\mathcal{O}, \mathcal{J} = \mathcal{O}\mathcal{J}$, onde $\mathcal{O}\mathcal{J} = \mathcal{O}\mathcal{J}$, sarà vero altresì che $\mathcal{O}\mathcal{K}$ equivale al prodotto di un'isomeria preceduta da un'omotetia; se per altro non si confonde con \mathcal{J} o con \mathcal{S} . Ecc. — Osservata che l'isomeria non esclude la trasformazione identica (P 37 § 4).

P 34 — Tr. — La similitudine è trasformazione *ortomorfa*: ossia converte qualunque angolo dato in un altro, che è congruente al primo. [Basta per quanto precede (P 36 § 4 o P 33) accertare, che il fatto è vero nell'omotetia. Si osservi che l'omotetia coordina sempre a qualunque raggio o segmento un raggio o un segmento, e a ciascun angolo piano convesso un angolo piano convesso (P 30, ecc.). Ora se p. es. $|\triangle ABC|$ e $|\triangle A'B'C'|$ siano triangoli omotetici, i due raggi corrispondenti $|AB|$ ed $|A'B'|$ — e nel modo stesso anche i raggi $|AC|$ ed $|A'C'|$ — oltre che paralleli fra loro (P 28), saranno da una stessa banda o da banda opposta della congiungente AA' (a parte il caso, che A' ed A si confondano), secondo che due punti omologhi quali che siano, pur che diversi l'un l'altro — p. es. gli A ed A' — giaceranno dalla stessa banda o da bande opposte del centro d'omotetia (P 38, 45 § 3; P 29). Ne viene che questi raggi (e p. cons. anche gli angoli \hat{A}, \hat{BC} e $\hat{A'}, \hat{B'C'}$), son simmetrici l'uno dell'altro rispetto al punto $A|A'$; oppure l'uno e l'altro simmetrici d'uno stesso angolo, rispetto al punti A ed $A|A'$: e però sempre congrui fra loro. Ecc.].

P 35 — Df. — Ogniqualvolta A e A' sian punti, pur che diversi fra loro, il nome di "*traslazione* (od *equipollenza*) di A in A' " — simboleggiato talvolta in $\left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ — è per significare la corrispondenza definita mercè le condizioni « che seguono ». 1) Al punto A si dia per immagine A' ; e, se B è un punto arbitrario fuor della retta che unisce A con A' , dicasi 'omologo' o 'trasformato' di B quel punto B' , dove la parallela a codesta retta da B s'incontra con la parallela da A' alla congiungente A con B (P 6, 7). 2) E se C è un punto, che

sta nella retta AA' senza coincider con A ; visto che dalla P 23 — mercè lo stesso ragionamento, pur non ha guari allegato a P 28 — risulta che il punto C' , dove questa retta s'incontra con la parallela tirata dal punto B' alla retta BC , non dipende da B , ma si veramente dagli A, A', C : in maniera che, tolto invece di B un qualsiasi punto D fuor dalle rette AA' e BB' , o un qualsiasi punto E sopra la BB' , risulterà sempre $D'C'$ parallela a DC , ed $E'C'$ parallela ad EC : allora un tal punto C' si dia per omologo a C . — Emerge dalle costruzioni suddette, che ciascun punto P' (tutto che dato ad arbitrio) è l'immagine di un qualche punto P ; ma, finchè i punti P e Q son diversi, per nessun modo coincideranno le immagini P' e Q' : insomma la 'traslazione di A in A' ' è una 'trasformazione invertibile dei punti in punti' (come le ometetie) ed ha per inversa la 'traslazione di A' in A '. Ecc. (1).

P 36 — Tr. « Perme stanti le Ipt. e le notazioni di P 35; la traslazione $\left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ non si distingue dalle traslazioni $\left\{ \begin{smallmatrix} n' \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} c' \\ c \end{smallmatrix} \right\}$. Essa non ha punti uniti, ma rappresenta in sè stessa ogni retta che sia la AA' o parallela ad AA' ; e in sè stesso ogni piano che passi per AA' , o sia parallelo a questa retta. Ad una retta, che non sia la AA' nè parallela ad AA' , coordina sempre una retta parallela alla prima; e così ad ogni piano, che non contenga la AA' , nè sia parallelo a questa retta, fa corrispondere un piano parallelo a quello. Ecc. ». Cfr. P 29.

P 37 — Tr. « E, dato un punto A'' diverso dagli A, A' , la risultante o prodotto delle traslazioni $\left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} A'' \\ A' \end{smallmatrix} \right\}$ è una nuova traslazione $\left\{ \begin{smallmatrix} A'' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ indipendente dall'ordine dei due fattori ».

P 38 — Tr. « Qualsivoglia traslazione è in pari tempo un'isomeria ». Cfr. P 30. [Che 'traslazione' involga 'similitudine' (in quanto le rette omologhe son parallele fra loro e coincidono) è già stabilito implicitamente nel raziocinio, da cui risulta P 30. Allora — grazie a P 35, 36 § 4 — basta notar questo fatto: coppie di punti omologhe per traslazione, le quali non sian per diritto, son sempre congrue fra loro: che è conseguenza immediata di P 23, 8.]

P 39 — Tr. « Sempre che gli A, A' sian punti distinti, la traslazione di A in A' sostituisce ad A' il punto simmetrico di A rispetto al medesimo A' ». Cfr. P 27 § 4. [Invero — posto $A'' = A/A'$ — la traslazione di A in A' dovrà convertire la coppia (A, A') nella (A', A'') , oppur nella (A', A) ; dal momento che $\left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ è un'isomeria (P 38) per la quale AA' è tautologa (P 36), e che su questa retta i punti A'' ed A , ed essi soltanto, distan da A' quanto A . Ma se A' fosse costituito in A , la traslazione convertirebbe in sè stesso il punto A/A' (P 3, 36 § 4); contro P 36].

(1) A questa defn. dell'equipollenza si potrà liberamente sostituire (con qualche vantaggio, almeno per certi rispetti) l'altra più semplice: "traslazione di A in A' " = "prodotto dell'equivalenza rispetto ad A per l'equivalenza rispetto al punto medio di (A, A') ": d'onde le proprietà segnalate in P 35-39 conseguiranno dal pari, attraverso i principi del parallelismo.

P 40 — Df. « ω essendo una sfera arbitraria non condensata in un punto, ed « O il centro di quella; per ciascun punto A, sol che diverso da O, condueasi la « retta AO, quindi s'innalzi dal punto O una retta perpendicolare ad AO (P 15 § 1, « P 14 § 2); e sia P nn de' punti, ove questa retta s'incontra con quella sfera « (P 20 § 2). Si può coordinare ad A quel punto — sia p. es. A' — dove la retta « AO s'incontra con la normale elevata in P alla congiungente A coa P nel piano « APO (P 9 § 2, P 1, ecc.): visto che nn tal punto A' è individuato per mezzo di A « ed ω , ossia non dipende da P. [Invero, qualunque altro semidiametro |OQ| della « sfera, pur che normale ad AO, si può sovrapporre ad |OP| mercè d'una rotazione « intorno ad AO, che traduce le rette QA, QA' rispettivamente in PA, PA' (P 11, « 23, 27 § 2)]. Nasce in questa maniera una certa trasformazione reciproca e « involutoria dei punti diversi da O in punti diversi da O, cui spetta il nome « di ' *antivinversione* ' rispetto ad ω : O è il ' centro ' dell'antivinversione, ω ne è « la ' sfera fondamentale ' ». — Il prodotto di codesta trasformazione per l'equi- « versione /O è la così detta ' *inversione* ' (positiva) rispetto ad ω : onde l' ' in- « versione ' di A rispetto ad ω è precisamente il simmetrico del punto A' rispetto « ad O. E i piani perpendicolari alla retta AO nei punti inverso e antinverso di A « saranno il piano *polare* e l'*antipolare* di A rispetto ad ω . Ecc. — Emerge ipso « facto dalla costruzione suddetta, che: « Per mezzo di nn'antivinversione arbitraria, « qualunque retta o piano che ne contenga il centro si rappresenta punto per punto « in sè stesso^{a)} (fatta astrazione dal centro, che non ha immagine alcuna); e così anche

la sfera fondamentale, di cui sono omologhi i punti diametralmente opposti: mentre « ogni cerchio o sfera, il cui centro è lo stesso centro d'antivinversione, avrà per im- « magine un cerchio o una sfera, eziandio centrati in quel punto. Etc. ».

P 41 — Tr. « Dati ω ed O come sopra; a qualsiasi piano, o retta, non con- « tenente O, sta di fronte, come figura antivera, una sfera od un cerchio, che « passa sempre per O (ma da cui questo punto si deve intendere escluso): e reci- « procamente. E qualunque cerchio o sfera in cui giacciono due punti omologhi, sarà « figura antivera di sè medesima ». [Sian per es. η un piano arbitrario che non « contiene O: E il piede della normale abbassata da questo punto a quel piano; A « un punto dato a piacere in η , pur che diverso da E. Si costriscan gli omologhi « E' ed A' dei punti E ed A mercè il semidiametro OP della sfera fondamentale « (P 40), apposto normale ad ambo le rette OE, OA (P 18, 26 § 2): onde E'E \perp AE « (P 18 § 2), AE \perp PE (P 53, 54, 18 § 2), PE \perp PE'; e per cons. PE' \perp PAE (P 25 « § 2). Dunque PE' \perp PA: sicchè il piano perpendicolare in P alla retta PA passerà « sempre da E' (P 35 § 2) qualunque sia il punto A (pur che giacente in η). Ma un « tal piano deve tagliare nel punto A', antinverso di A, la congiungente A coa O (P 35 « § 2 e P 40): dunque A' è comune a due rette uscenti rispettivamente da O ed E' e di più « perpendicolari fra loro; atteso che il piano OPA, normale ai due piani OAE, PAE' « (in quanto OP è normale ad ambo le rette OA, OE, e così PA alle rette PA' e PE') « sarà eziandio perpendicolare alla comune intersezione di questi (P 55 § 2), che è « precisamente la A'E' — d'onde A'E' \perp OA. Dunque il luogo di A', ossia la figura « antivera del piano η , non è altro che la polosfera dei punti O, E' (P 27).

Dimostri il Lettore che, viceversa, ogni sfera passante per O si dee trasformare in un piano. Pertanto qualunque retta r , che non contenga O , ha per immagine un cerchio, il quale contiene O ; cioè l'intersezione del piano tautologo Or (P 40) con una sfera η' corrispondente ad un piano η che passi per r (P 3 § 3, ecc.): e reciprocamente. — Ora si osservi, che i tre punti P, A, A' equidistano dal punto medio di A, A' (P 27) e però la normale innalzata per A, A' al piano PAA' — la quale è obbligata a giacere sul piano OAE (P 54, 51 § 2) — sarà il luogo dei centri di tutte le sfere, che passan per quei tre punti (P 38, 37, 52, 54, 55 § 2). D'altra parte una sfera si fatta deve tagliar ciascun piano, il quale contenga OP , lungo un cerchio autosimmetrico rispetto al piano OAE (P 32, 56 § 2); dunque avente su questo piano il centro e due punti diametralmente opposti (P 31, 21 § 2, ecc.), che saranno per conseguenza l'uno antinverso dell'altro (P 26, 40). Ne viene che un cerchio di questo piano OAE , sol che passi per ambo i punti A, A' , sarà necessariamente antinverso di sè medesimo; in quanto vi sarà sempre una sfera che lo contenga, passando inoltre per P . (Si lascia al Lettor di provare, che per un cerchio ed un punto esterno al suo piano — come per due cerchi segantisi in punti diversi, senza giacere in un medesimo piano — passa sempre una sfera determinata ed unica). Dunque l'antinversione dee convertire in sè stesso ogni cerchio — e quindi anche ogni sfera — che passi per due punti omologhi, quali esse siano.] — In questa e nella seguente proposizione si stabiliscono sommariamente le proprietà cardinali dell'antinversione piana e solida — quindi anche i fatti dell'inversione positiva (P 40) e, se vogliamo, anche quelli che si riferiscono a polarità ed antipolarità rispetto a cerchi o sfere — per via di semplici considerazioni stereometriche; e senza ricorrere (come i più fanno) alla dottrina delle proporzioni e dei triangoli simili, o dell'equivalenza (*).

P 42 — Tr. — E a qualunque cerchio o sfera, che non contenga O , l'antinversione rispetto ad o coordina sempre un cerchio, o una sfera *. [Ritenendo le ipote. e le notazioni precedenti, qualunque cerchio c del piano γ sarà trasformato nel cerchio comune alla sfera η' e alla sfera che, oltre a passare per c , contiene il punto antinverso d'un punto arbitrario di c (P 1 § 3, P 41, ecc.). — Di poi, se ξ è una sfera, la quale non passi per O ; e siano A e B due punti scelti a piacer su di essa, non però allineati con O ; indi c e d siano le sezioni prodotte in ξ da due piani (l'un l'altro distinti), ciascuno dei quali contenga ambo i punti A e B senza passare per O ; allora i due cerchi c' e d' , che corrispondono a quelli (P 41), si taglieranno nei punti A' o B' , giacendo per conseguenza in una medesima sfera $c'd'$. Questa sarà la figura antinversa di ξ . Invero, se X è un punto arbitrario di ξ che non appartenga a c , nè a d , nè ad OA ; ciascun piano γ , il quale contenga ambo i punti A ed X , senza passare per O , nè per B , nè per alcuna delle due rette tangenti in A i due cerchi c o d (P 40 § 1, P 8, 14 § 2) — piano, che fuor di dubbio esista, come il Lettor può vedere — taglierà necessariamente gli stessi cerchi in due anorzi punti Y e Z , diversi l'uno dall'altro e da X (P 10, 11 § 2, ecc.) e la sfera data ξ in un

(*) Una 'teoria geometrica dell'inversione' che non si appella nè a proporzioni, nè ad equivalenza, fu già proposta da G. LAMAZZINI nel Periodico di Matem., v. II, (a. 1900).

cercchio XYZ (P 3 § 3), sul quale giacciono i punti A, X, Y, Z, al tutto diversi fra loro. Ma già si sa che a un tal cercbio dee corrispondere un cercbio X'Y'Z'; il quale, incontrando la sfera $c'd'$ in tre punti diversi A', Y' e Z', sarà obbligato a giacer su di essa (P 12 § 2, ecc.): onde anche X' appartiene a $c'd'$; ecc., ecc. — Dopo ciò si può esser sicuri che un cercbio, il quale non passi per O, si trasforma sempre in un cercbio, ancorchè vi passi il suo piano: però che un tal cercbio è l'intersezione di questo piano con una sfera che non contiene O. Ecc.] — La prop. seguente si appella a P 41, ma non a P 42.

P 43 — Tr. « Nel supposto che A, B siano punti diversi fra loro, ed E, F « punti di AB l'uno interno e l'altro esterno ad |AB|, si dimostra qualmente lo « polosfere di (A, B) ed (E, F) s'incontrano ». Cfr. P 11 § 5. [Si può conceder che il punto F stia sul prolungamento di |AB| oltre A. Proveremo, che s'incontrano necessariamente i due cerchi, tracciati su quelle sfere da un piano π , il quale contenga AB. Perciò — detto P un de' punti, dove la normale innalzata da E alla AB nel piano π incontra la polosfera di A, B (P 11 § 3) — si consideri l'antiverzione rispetto alla sfera P_1 (P 40): mercè la quale quale A si cambia con B (P 26, 40) o il cercbio (A, B) si converte in sè stesso (P 41); mentre che l'altro cercbio (E, F) si muta in retta del piano π (P 41) e precisamente nella normale f' elevata ad AB dal punto F', che corrisponde ad F. Il Tr. sarà dimostrato, se proveremo che questo punto F' cade fra i punti A e B: però che allora il cercbio tautologo (A, B), tagliando due volte f' (P 11 § 3) dovrà tagliare eziandio la figura antivera, ossia l'altro cercbio (E, F), in punti diversi. Ora — se C è un punto nell'ombra di P da B (non importa quale, pur che diverso da P) — è forse che l'ombra di A da B si produca nel semipiano 'PA verso C' (P 29, 39 § 3), e al tempo stesso nel semipiano 'PC verso A', che contiene il raggio |BA per intero (P 43 § 3): dunque tutta entro l'angolo $\hat{P}.AC$ (P 47, 49 § 3). Ne viene che il punto F' (straniero ad ambo le rette PA, PC) non può stare nell'ombra di A da B: perchè, se vi stesse, l'angolo retto $\hat{P}.GG'$ sarebbe minore dell'angolo retto $\hat{P}.AC$ (P 49 § 3; P 12, 16 § 5; P 40), contro le P 40 § 4 o P 15 § 5. Ma se il medesimo punto F' cadesse nell'ombra di B da A, sarebbe escluso dall'intervallo |BF|, ch'è tutto quanto in |BA| (P 35, 29, 30 § 3); e al tempo stesso F escluso dall'intervallo |BF| (ivi): onde B cadrebbe tra F ed F' (P 15 § 3) e per cons. $\hat{P}.BF < \hat{P}.FF'$ (P 47 § 3, P 12 § 5); mentre dall'essere A interno a |BF| si deduce (ivi) $\hat{P}.AB < \hat{P}.BF$. Insomma l'angolo retto $\hat{P}.AB$ n'uscirebbe minore dell'angolo retto $\hat{P}.FF'$. Si conclude che il punto F' è in |AB| (P 30 § 3).] — Sopra un ragionamento consimile (ma un po' più breve) si può fondar la seguente:

P 44 — Tr. « E se viceversa — essendo A, B, E, F quattro punti non collineari — le polosfere di (A, B) e di (E, F) s'incontrano in punti diversi; allora « un de' punti E, F sarà interno ad |AB|, l'altro esterno ».

§ VII.

Prodotti di isomeria. Congruenze e anticongruenze. Antirotazioni e antistrasfazioni. Elicomozioni. Classificazione delle isomerie.

P 1 — Tr. — La risultante o prodotto di più rotazioni intorno al medesimo asse non può esser che rotazione intorno a quest'asse, o trasformazione identica. [Siano \mathcal{R} e \mathcal{Q} due rotazioni arbitrarie intorno alla retta r ; sicchè ciascun punto di r sarà convertito in sè stesso dall'isomeria $\mathcal{Q}\mathcal{R}$. Or se questa ammettesse un punto tantologo A esterno alla r , onde $\mathcal{Q}\mathcal{R}A = A$: allora — detto α il piano Ar e μ il piano perpendicolare alla coppia $(A, \mathcal{R}A)$ nel suo punto medio — ne verrebbe $\mathcal{R} = \mu, \mu/\alpha$ e $\mathcal{Q} = \mu/\alpha, \mu$ (P 25, 26 § 4) e per cons. $\mathcal{Q}\mathcal{R} = 1$: onde il Tr. consegue da P 30, 8 § 4].

P 2 — Tr. — Qualsivoglia rotazione è sempre il quadrato di un'altra rotazione intorno al medesimo asse. [Essendo r l'asse d'una rotazione arbitraria \mathcal{R} , A un punto esterno a quest'asse ed $A' = \mathcal{R}A$: conducasi il piano π normale alla coppia (A, A') nel suo punto medio: piano che passa sempre per r , giusta le P 23 38 § 2. Esiste per certo una rotazione intorno ad r — e sia per es. \mathcal{S} — atta a subordinare ad A un certo punto B di π , non importa quale (P 27 § 2): e una rotazione siffatta dovrà condurre B nel punto A/π (P 27 § 4), vale a dire in A' . Pertanto la rotazione $\mathcal{S} \cdot \mathcal{R}$ (P 1) ossia \mathcal{S}^2 farà corrispondere A' ad A , come lo data \mathcal{R} : dunque $\mathcal{S}^2 = \mathcal{R}$ (P 28 § 4)].

P 3 — Tr. — Il prodotto di due rotazioni arbitrarie intorno a rette diverse, ma concorrenti in un punto, è una rotazione intorno a qualche altra retta uscente dal punto comune a quegli assi. [Siano \mathcal{R} e \mathcal{Q} le due rotazioni, u e v i loro assi. Se nel piano π di questi assi tagliamo i punti A e B ad arbitrio, pur che esterni rispettivamente alle u e v : onde $\mathcal{R}A \sim A$ e $\mathcal{Q}B \sim B$ (P 8 § 4): allora, detti α e β i piani polari (P 38 § 2) alle coppie $(A, \mathcal{R}A)$, $(B, \mathcal{Q}B)$ — piani che passan rispettivamente per le u, v (P 23 § 2) — si sa che $\mathcal{R} = \pi/\alpha$ (P 26 § 4) e $\mathcal{Q} = \pi/\beta$ (P 25 § 4): per la qual cosa $\mathcal{Q}\mathcal{R} = \beta/\alpha$. Ora i piani α e β non possono coincidere: perchè l'uno contiene u ma non A , l'altro v ma non B ; mentre il piano π contiene ambedue questi punti: e d'altra parte s'incontran lungo una retta, poi che passan dal punto comune alle u, v . Onde basta appellarsi a P 4 § 4.]

P 4 — Tr. — Il prodotto d'una rotazione arbitraria per lo specchiamento ad un piano, che ne contenga l'asse, equivale allo specchiamento in un altro piano, estendendo passante per l'asse. [Le date trasformazioni sian p. es. \mathcal{R}, \mathcal{S} ; r sia l'asse di rotazione e σ il piano di simmetria. Un punto A scelto a piacere in σ , ma fuor di r , verrà trasferito ad es. in A' da \mathcal{R} ; e lo A , da \mathcal{S} ; e questi punti A' e A , saranno diversi da A (P 22 § 2, P 8 § 4). Ora indicando con δ , e δ' i piani po-

lari alle coppie (A_1, A) e (A, A') — piani che passano per r (P 23 § 2, ecc.) — avremo in un tempo, grazie alle P 25, 26 § 4: $\mathfrak{N} = \delta \cdot \delta$, ed $\mathfrak{N} = \delta \cdot \delta$: ondè $\delta \mathfrak{N} = \delta \cdot \delta$, ed $\mathfrak{N} \delta = \delta$.

P 5 — Tr. « Il prodotto delle simmetrie rispetto a due piani paralleli fra loro « è una traslazione normale a quei piani ». Cfr. P 4 § 4. [Detti μ e ν quei due piani, siano A, B, C tre punti non collineari di μ , e A', B', C' i lor simmetrici rispetto a ν : onde il piano A'B'C' sarà parallelo a μ (P 42, 51 § 2, P 15 § 6), le rette BB' e CC' parallele alla retta AA' (P 11 § 6, ecc.) e le A'B', A'C' parallele alle AB, AC (P 4, 18 § 6). Ne viene che la traslazione di A in A' subordina i punti A', B' e C' ai punti A, B, C (P 35 § 6), al pari dell'isomeria $\nu \cdot \mu$: per la qual cosa — posto $\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} A' \\ A \end{pmatrix}$ — la trasformazione $\mathfrak{Q}^{-1} \cdot \nu \cdot \mu$ equivale necessariamente a μ , ovvero all'identità (P 35, 38 § 6). Ma il primo evento farebbe essere \mathfrak{Q} uguale a ν : assurdo (P 36 § 6, P 31 § 2). Dunque resta che $\mathfrak{Q}^{-1} \cdot \nu \cdot \mu = 1$, vale a dire $\nu \cdot \mu = \mathfrak{Q}$.] — Osservate che da $\nu \cdot \mu = \mathfrak{Q}$ si deduce $\nu = \mathfrak{Q} \cdot \mu$ e $\mu = \nu \cdot \mathfrak{Q}$; e di qui facilmente si trae che:

P 6 — Tr. « La risultante d'uno specciamento, al quale preceda o segua una « traslazione normale al piano specciante, è ancora uno specciamento: e il nuovo « piano di simmetria sarà parallelo al primo ».

P 7 — Tr. « La risultante di due rotazioni, eseguite intorno a due rette parallele fra loro è, in ogni caso, una rotazione o una traslazione ». Cfr. P 3. [Si possono qui riprodurre senz'altro le argomentazioni recate a provar la P 3, fino a concluder che $\mathfrak{Q}\mathfrak{S} = \beta \cdot \alpha$, e che i piani α o β non possono coincidere (ivi). Ora — secondo che questi piani si tagliassero lungo una retta, o saranno paralleli fra loro — il prodotto $\beta \cdot \alpha$ sarà una rotazione (P 4 § 4) o una traslazione (P 5b).]

P 8 — Tr. « Compendo, nell'ordine che più ci piace, una rotazione arbitraria « con qualsivoglia traslazione normale all'asse di quella, si ottiene per risultante « una rotazione intorno ad un asse, che è parallelo al primo ». [Nelle ipta. di P 7, togliasi un punto a piacere sull'asse μ di \mathfrak{S} — sia p. es. B — e dicasi ancora B' il punto QB. Se i piani α e β son paralleli fra loro, il prodotto $\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ equivale a $\begin{pmatrix} B' \\ B \end{pmatrix}$ (ivi o P 36 § 6): per la qual cosa $\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} B' \\ B \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{S}^{-1}$ e $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q} \cdot \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix}$. Ma (come ognun può vedere) date ad arbitrio una rotazione \mathfrak{S} intorno ad μ e una traslazione $\begin{pmatrix} B' \\ B \end{pmatrix}$ normale ad μ , si può sempre assegnare una retta ν parallela ad μ e una rotazione \mathfrak{Q} intorno a ν , per modo che $\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ risulti uguale a $\begin{pmatrix} B' \\ B \end{pmatrix}$: ecc., ecc.].

P 9 — Df. « Si dà il nome d'«antirrotazione» all'isomeria che risulta da « una rotazione arbitraria, seguita dallo specciamento in un piano perpendicolare « all'asse ». — Due operazioni si fanno — sia p. es. \mathfrak{N} ed δ — son permutabili l'una con l'altra, vale a dire $\delta \mathfrak{N} = \mathfrak{N} \delta$ [Veda il Lettore]. Per la qual cosa « antirrotazione » si definisce altresì come « prodotto di specciamento per rotazione intorno ad un asse normale al piano specciante ». — Osservate che — detti r l'asse

di \mathfrak{A} e σ il piano di δ — l'antitrotazione $\delta\mathfrak{N}$, o $\mathfrak{A}\delta$, dee convertire il punto πr in sè stesso (P 23, 81 § 2); ma non può ammettere alcun altro punto tautologo [Veda il Lettore]. — Se \mathfrak{A} sarà un semigiro (P 7 § 4) intorno ad r , l'antitrotazione $\delta\mathfrak{N}$ sarà tutt'uno con l'equivalenza rispetto al punto πr [Detto O questo punto, la similitudina $\delta\mathfrak{N}$ — in quanto non formo ogni singolo punto di r , oltre che ciascun piano il quale contenga r , ma sposta i punti di σ — è necessarium.° un semigiro (P 30, 23, 10 § 4): poi che si distingue così dall'identità, come ancora dallo specchiamento in un piano passante per r (P 56 § 2). Dunque $\delta\mathfrak{N} \cdot \sigma = \pi r$, e per cons. $\delta\mathfrak{N} = \pi r \cdot \sigma$].

P 10 — Tr. ° Qualunque isomeria che possieda un sol punto unito è un'antitrotazione. [Anzitutto si osservi, che il prodotto dello specchiamento ad un piano arbitrario per il semigiro intorno ad un asse, che incontri il piano in un punto senza giacervi, eguaglia sempre un'antitrotazione (che ha l'asse in quel piano). Cfr. P 4. Invero, se il piano, l'asse ed il punto onde si parla sian per es. π , s ed O; e σ denoti un piano passante per s e normale a π (P 54 § 2), r la perpendicolare a σ in O, e il piano πs (certamente diverso da π): avremo, grazie a P 6 § 4: $\delta\mathfrak{N} \cdot \sigma = (\delta\mathfrak{N} \cdot \sigma) \cdot \pi$. D'altra parte l'operazione composta $\delta\mathfrak{N} \cdot \sigma$ equivale ad una certa rotazione \mathfrak{N} intorno alla retta r (P 4 § 4): onde $\delta\mathfrak{N} \cdot \sigma = \sigma \cdot \mathfrak{N}$; ecc. — Ciò premesso (o ritenendo qualunque delle notazioni suddette) denoti p. es. \mathfrak{J} un'isomeria, che ammetta un sol punto tautologo; o questo sia p. es. O. Preso un punto A a piacere, pur che diverso da O, e posto $A' = \mathfrak{J}A$, $M = A'A$; si chiami s la retta OM, oppure una retta perpendicolare in O alla congiungente AA' , secondo che M è diverso da O, oppar si confonde con O (la qual cosa avviene ogni volta che gli A, A' sian per diretto con O): onde A ed A' simmetrici rispetto ad s (P 36 § 4, P 54 § 1, P 5 § 2, ecc.). Ora il prodotto $\delta\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{J}$, in quanto converte in sè stesso ciascuno dei punti O ed A, non può esser che l'identità, o lo specchiamento ad un certo piano π che passa per quei due punti, o una qualche rotazione \mathfrak{S} intorno alla retta OA (P 22-24, 30 § 4). Se non che il primo di questi eventi addurrebbe senz'altro $\mathfrak{J} = \delta\mathfrak{N}$, o il terzo $\mathfrak{J} = \delta\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{S}$: onde \mathfrak{J} sarebbe una rotazione (P 7 § 4, P 3) contro l'ipotesi (P 23 § 2). Resta il secondo caso, nel quale $\mathfrak{J} = \delta\mathfrak{N} \cdot \pi$. Allora — grazie all'osservazione precedente — \mathfrak{J} è un'antitrotazione, se per altro la s non giacerà su π : ma il supporre la π farebbe essere tautologo, secondo \mathfrak{J} , ogni punto di quella retta (P 4); contro l'ipotesi]. — Pertanto:

P 11 — Tr. ° Le isomerie dotate di punti uniti sono l'identità, la simmetria rispetto ad un piano, la rotazione, l'antitrotazione — e queste soltanto. — Inoltre:

P 12 — Tr. La risultante d'una rotazione arbitraria, preceduta o seguita dallo specchiamento ad un piano che ne incontri l'asse in un punto (senza passare per questo) è sempre un'antitrotazione. [Sian p. es. \mathfrak{N} la rotazione onde si parla, r il suo asse, π il piano specchiante, ed O il punto πr . L'isomeria $\delta\mathfrak{N}$ non ha punti uniti, da O in fuori. Invero per un punto A qualsivoglia, ma esterno all'asse r , il piano polare dei punti A ed $\mathfrak{N}A$ passa sempre per r , e quindi è diverso da π : onde $\mathfrak{N}A \sim A/\pi$ e p. o. $(\mathfrak{N}A)/\pi \sim A$. E similmente un punto B di r , pur che diverso da O, si confonde col punto $\mathfrak{N}B$, ma è diverso dal punto B/π :

onde $\mathfrak{S}B \sim B/\pi$. Lo stesso avviene dell'isomeria $\mathfrak{S}A/\pi$: sicchè basta appellarsi a P 10].

P 13 — Tr. « Lo specchiamento ad un piano non può equivalere al prodotto « di un'isomeria per sè stessa ». [Essendo π un piano arbitrario, si proverà che l'ipotesi $\mathfrak{S}^2 \sim \pi$, dove \mathfrak{S} è un'isomeria, contraddice a P 11. Ora, se A è un punto arbitrario di π , ed $A' = \mathfrak{S}A$, bisogna che il punto $\mathfrak{S}A'$ coincida con A . dal momento che $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}A) = \mathfrak{S}^2 A = A/\pi = A$ (P 31 § 2): dunque il punto $A|A'$ sarà tautologo in \mathfrak{S} (P 42, 43 § 1; P 3, 36 § 4). Ma la \mathfrak{S} non può essere un'identità, nè uno specchiamento, nè una rotazione: se ne la \mathfrak{S}^2 sarebbe necessariamente un'identità, o una rotazione (P 1, ecc.); laddove π non equivale a nessuna di queste operazioni (P 31 § 2, P 8 § 4). Nè può essere \mathfrak{S} un'antirotazione, vale a dire $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^2$ (P 9); perchè n'oscirebbe esistendo $\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S}^3 \cdot \mathfrak{S}^3 = \mathfrak{S}^6 \mathfrak{S}^3$ (ivi) $= \mathfrak{S}^9$. Dunque una \mathfrak{S} , per la quale $\mathfrak{S}^2 \sim \pi$, non esiste (P 11)].

P 14 — Tr. « Similmente il quadrato di un'isomeria non è atto a produrre « un'antirotazione ». [Invero l'ipotesi $\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{C}$ — essendo \mathfrak{C} un'antirotazione arbitraria — involge la stessa contraddizione che dianzi: atteso che \mathfrak{C} ammette un punto tautologo O (P 9), e p. e. la \mathfrak{S} dovrebbe rappresentare in sè stesso il punto medio fra O ed $\mathfrak{S}O$. Ma, fin tanto che $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}^2$, la \mathfrak{S} non può esser nè identità, nè specchiamento, nè antirotazione; perchè \mathfrak{C} non può esser nè rotazione, nè identità (P 23 § 2, P 9)].

P 15 — Tr. « Qualsivoglia traslazione, tutto che data ad arbitrio, si può aver « componendo una certa traslazione con sè medesima ». Cfr. P 2. [Siano A, A' due punti arbitrari, M il lor punto medio. Peichè la traslazione di A in M (P 35 § 6) traduce M in A' (P 39 § 6), il suo quadrato farà corrispondere A' ad A : onde $\begin{pmatrix} A' \\ A \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} M \\ A \end{pmatrix}^2$, in forza di P 37, 35 § 6].

P 16 — Tr. « Qualunque isomeria priva di punti uniti sarà traslazione, se esiste « stou tre rette parallele fra loro, ma non complenari, ognuna delle quali sia contenuta in sè stessa ». [Siano u, v, w le tre rette, \mathfrak{S} l'isomeria onde si parla. Se nel piano delle due parallele u, v , ma fuori d'ognuna, toglasi un punto A a piacere, e dicasi A' il punto $\mathfrak{S}A$; le normali abbassate da questi punti alla retta tautologa u la taglieranno in due punti omologhi P e P' , e le due coppie omologhe (A, P) e (A', P') saranno congrue fra loro (P 36 § 4). Ma i punti A e A' giacciono dalla stessa banda di u ; perchè la \mathfrak{S} converte in sè stesso ciascuno dei semipiani, onde il piano tautologo uv è diviso da u (P 44 § 3), dal momento che uno di questi contiene la retta unita v (P 4 § 6): dunque la retta AA' sarà parallela alla u (P 9 § 6, ecc.) e p. cons. tautologa (P 6 § 6). Similmente qualsiasi punto B esterno al piano uv verrà trasferito da \mathfrak{S} in un punto B' , che giace dalla stessa banda di B rispetto a quel piano: visto che \mathfrak{S} dee convertire in sè stesso ognuna dei semispazi ecc. poi che in uno di questi giace la retta unita w (P 20, 21 § 6): onde ancor qui si deduce (calando da B e B' le perpendicolari al piano tautologo uv , ecc.) che la congiungente di B con B' è parallela alle rette u, v e, al par di queste, tautologa. Sono dunque tautologie rispetto ad \mathfrak{S} tutte quante le rette parallele ad u . D'altra

parte due rette omologhe quali che siano, pur che diverse fra loro — p. es. le AB e A'B' — giacciono sempre in un piano senza incontrarsi: perchè, se avessero un punto a comune, la retta unita uscente da questo le taglierebbe in due punti omologhi, ma coincidenti fra loro. Dopo ciò non rimano che da appellarsi a P 35 § 6].

P 17 — Df. « Si chiama *'antitraslazione'* il prodotto d'una traslazione « arbitraria per lo specchiamento in un piano parallelo ad essa ». — Ovvero (queste due componenti essendo permutabili fra loro, come il Lettor può vedere): *'Antitraslazione'* vuol dire: « prodotto di *'specchiamento'* per *'traslazione'* parallela al piano specchiante ».

P 18 — Tr. « L'antitraslazione $\cdot / \pi \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ — essendo π un piano dato a piacere, ed A, A' punti diversi sopra una retta parallela a π , e giacente in esso — è un'isomeria, che non tiene fermo alcun punto, ma rappresenta in sé stessa « ogni retta del piano π , che sia parallela alla AA' (o coincida con questa); e in « sé stesso il piano π , e ciascun piano perpendicolare a π lungo una retta di quelle. Non esiste alcun'altra retta tantologa o piano tantologo, da questi in fuori: e le « due bande del piano π si scambieranno fra loro ». Ecc.

P 19 — Tr. « Il prodotto d'uno specchiamento, preceduto o seguito da traslazione obliqua al piano specchiante, è un'antitraslazione ». Cfr. P 6 o P 17. [Sia π il piano specchiante e B un suo punto, non importa quale. Una traslazione, tutto che data ad arbitrio, porterà B in qualche altro punto B' (diverso da B) e potrà quindi rappresentarsi con $\left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B \end{smallmatrix} \right\}$ (P 36 § 6). Per Ipt. la retta BB' non è perpendicolare a π , nè giace in π : onde il piano parallelo a π , che passa dal punto B', dovrà tagliar la normale innalzata dal punto B a π in un certo punto — sia p. es. B'' — diverso da B e da B'. Ora il prodotto di $\left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B \end{smallmatrix} \right\}$ per $\left\{ \begin{smallmatrix} B'' \\ B \end{smallmatrix} \right\}$ — o di $\left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B'' \end{smallmatrix} \right\}$ per $\left\{ \begin{smallmatrix} B'' \\ B \end{smallmatrix} \right\}$ — eguaglia precisamente la traslazione di B in B' (P 37 § 6): per la qual cosa $\left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B \end{smallmatrix} \right\}$.

$/ \pi = \left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B \end{smallmatrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} B'' \\ B \end{smallmatrix} \right\} / \pi$. D'altra parte la trasformazione $\left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B \end{smallmatrix} \right\} / \pi$ equivale allo specchiamento in un certo piano χ parallelo a π (P 6): dunque $\left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B \end{smallmatrix} \right\} / \pi = \left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B'' \end{smallmatrix} \right\} / \chi$: e questa è un'antitraslazione (P 17), poi ohe la retta B'B'' è parallela a χ (P 20, 15 § 6). — Nel modo stesso $/ \pi \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B \end{smallmatrix} \right\} = / \pi \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} B'' \\ B \end{smallmatrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B'' \end{smallmatrix} \right\} = / e \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ B'' \end{smallmatrix} \right\}$, essendo e un certo piano parallelo a π].

P 20 — Tr. « Nessuna antitraslazione è il quadrato di un'isomeria ». [Se il quadrato di un'isomeria (non importa quale) \mathcal{J} fosse per avventura un'antitraslazione $\cdot / \pi \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ (P 18), qualunque retta p esistente nel piano π e parallela (od uguale) ad AA' dovrebbe esser rappresentata in sé stessa da \mathcal{J} , ovvero in qualche altra retta della medesima classe: atteso che il fatto di $\mathcal{J}p = p$ (P 18) porta seco, che anche la retta $\mathcal{J}p$ sia tantologa per \mathcal{J} . Il piano π sarebbe dunque tantologo secondo \mathcal{J} ; e

i due semispazi ch'esso determina — sia che β li rappresenti ciascuno in sè stesso, o che li scambi fra loro — risulterebbero tautologici secondo β' : al contrario di ciò che avviene nell'antitraslazione (P 18)].

P 21 — *Def.* « Si dà il nome di *elicomozione* (Schraubenbewegung) alla risultante d'una rotazione qualsiasi, preceduta o seguita da una traslazione parallela all'asse di quella. Osservate che la traslazione di A in A' posto che gli A, A' sian punti diversi — è permutabile con qualsivoglia rotazione intorno alla retta AA' ».

P 22 — *Tr.* « L'elicomozione non ha punti uniti; nè rette unite, dall'asse in fuori ». [Detto \mathfrak{R} e \mathfrak{U} le componenti di un'elicomozione arbitraria, si vedrà facilmente che questa non può convertire in sè stesso alcun punto dell'asse r di \mathfrak{R} (P 23 § 2, P 36 § 6); nè alcun punto fuori dell'asse, perchè il piede della normale calata da un tal punto unito a quest'asse risulterebbe tautologo. Nè può la $\mathfrak{U}\mathfrak{R}$ convertire in sè stesso alcun piano che tagli r in un punto, o sia parallelo ad r : ma se un piano passante per r corrisponde a sè stesso, tutti i piani che passan per questa retta risultan tautologici, e la componente \mathfrak{R} sarà un semigiro (P 8, 10 § 4, P 36 § 6, ecc.). L'asse r di \mathfrak{R} è certamente tautologo; ma non può esser tautologa nessuna retta che tagli r in un punto, o sia parallela ad r . E se fosse unita una retta sghemba con r , sarebbe unito anche il piano che la contiene, ed è parallelo ad r . Ecc.].

P 23 — *Tr.* « Esiste sempre un'elicomozione, che ha per quadrato una data elicomozione ». [Si sa che le componenti \mathfrak{R} e \mathfrak{U} di un'elicomozione arbitraria sono rispettivamente il quadrato di una rotazione \mathcal{R} intorno al medesimo asse r (P 2) e il quadrato di una traslazione \mathcal{Q} secondo r (P 15): onde $\mathfrak{U}\mathfrak{R} = \mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{R} = \mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{Q}$ (P 21) = $(\mathcal{Q}\mathcal{R})^2$].

P 24 — *Tr.* « Il prodotto d'una rotazione arbitraria per qualsivoglia traslazione obliqua all'asse di quella è sempre un'elicomozione (intorno ad un certo asse, che è parallelo al primo) ». Cfr. P 8 e P 21. [Si scomponga la traslazione assegnata in due traslazioni $\left\{ \begin{smallmatrix} n'' \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} n' \\ n \end{smallmatrix} \right\}$, che l'una sia perpendicolare e l'altra sia parallela all'asse di rotazione, come in P 19 (B essendo un punto dell'asse); indi si facciano valere le P 8, 21].

P 25 — *Tr.* « Qualunque isomeria priva di punti uniti è necessariamente una traslazione, o un'antitraslazione, o un'elicomozione ». Cfr. P 11. [Se l'isomeria onde si parla — sia p. es. β — rappresenta un punto A qualsiasi in A', il prodotto di β per la traslazione di A' in A, in quanto tien fermo A, non potrà esser che 1) un'identità, ovvero 2) uno spezzamento, o 3) una rotazione, o 4) un'antitraslazione (P 11). Nel 1° caso, cioè se $\left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\} \cdot \beta = 1$, l'isomeria onde si parla

equivale alla traslazione $\left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ (P 35 § 6). — Nel 2° caso, dal fatto che $\left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\} \cdot \beta = \pi$,

dove π sarà un certo piano che passa per A, si deduce che $\beta = \left\{ \begin{smallmatrix} A' \\ A \end{smallmatrix} \right\} \cdot \pi$: per la qual cosa (secondo che questo piano è, o non è, perpendicolare alla retta AA') l'isomeria

\mathcal{J} dovrà essere uno spezzamento, o un'antitraslazione (P 6, 17, 19): ma il primo evento è contrario all'Ipt. — Nel 3° caso, che involge $\mathcal{J} = \begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}, \mathcal{R}$ (\mathcal{R} essendo una rotazione, l'asse r della quale contiene A) la \mathcal{J} non può esser che rotazione (P 8) od elicomozione (P 21, 24): ma l'essere \mathcal{J} priva di punti uniti escluderà, come dianzi, un evento. — Il 4° caso, espresso da $\begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}, \mathcal{J} = \mathcal{R}\delta$ (P 9) ove δ denota lo spezzamento rispetto al piano σ perpendicolare in A alla r farebb'essere $\mathcal{J} = \begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}, \mathcal{R} \cdot \delta$.

Ora (secondo che r è, o non è, perpendicolare alla retta AA') il prodotto $\begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}, \mathcal{R}$, è una certa rotazione \mathcal{R}_σ (P 8), o una certa elicomozione $\mathcal{Q}_\sigma, \mathcal{U}_\sigma$ (P 21, 24), intorno a qualche altra retta u , o v , parallela ad r e quindi normale a σ : per la qual cosa $\mathcal{J} = \mathcal{R}_\sigma \cdot \delta$, oppure $\mathcal{J} = \mathcal{Q}_\sigma, \mathcal{U}_\sigma \cdot \delta = \mathcal{Q}_\sigma, \mathcal{U}_\sigma / \rho$ (P 6), ρ essendo un cert'altro piano parallelo a σ ; e in ambo i casi la \mathcal{J} sarebbe un'antitrotazione (P 9): il che non può darsi, finchè la \mathcal{J} è priva di punti uniti. Ecc.] — Di qui si deduce immediatamente, avuto riguardo a P 11:

P 26 — Tr. « L'identità, lo spezzamento, la rotazione, l'antitrotazione, la traslazione, l'antitraslazione e l'elicomozione abbracciano tutte le isomerie possibili: cioè non esiste altra sorta d'isomeria dopo « quelle ». — In altri termini: Un'isomeria qualsivoglia o converte in sé stesso 1) ogni punto; o 2) tutti i punti d'un piano, ovvero 3) d'una retta (od essi soltanto); o 4) ammette un sol punto unito; oppure non ha punti uniti, ma si rette unite (necessariamente parallele), che 5) non giacciono tutte in un piano, ovvero 6) sono tutte in un piano; oppure 7) non ha punti uniti ed ammette una sola retta tautologa (P 22-24, 30, 37, 38 § 4; P 88 § 6; P 10, 16, 17, 22, 25).

P 27 — Df. « Vi sono due generi d'isomeria, ben distinti fra loro. Le une possono aversi come quadrati di altre isomerie; cioè sono tali, che ognuna equivaiga al prodotto di un'isomeria per sé stessa: e queste diconsi « moti », ovvero « congruenze ». Le altre — che non sono quadrati d'isomerie, cioè non si ottengono mai componendo un'isomeria con sé stessa — si chiamano « anticongruenze » ⁽¹⁾. Sono del primo genere, ossia congruente: l'identità, la rotazione (P 2), la traslazione (P 15) e l'elicomozione (P 23). Del secondo genere, o anticongruente, lo spezzamento, l'antitrotazione e l'antitraslazione (P 13, 14, 20). Osservate che l'inversa di qualunque $\left. \begin{matrix} \text{congruenza} \\ \text{anticongruenza} \end{matrix} \right\}$ è ancora una $\left. \begin{matrix} \text{congruenza} \\ \text{anticongruenza} \end{matrix} \right\}$: però che dall'eguaglianza $\mathcal{C} = \mathcal{J}^2$ (dove \mathcal{J} è un'isomeria qualsivoglia) nasce sempre che $\mathcal{C}^{-1} = (\mathcal{J}^{-1})^2$.

(1) Il criterio di separazione che qui si fa intervenire è (per mio conto) assai più massacrante dell'ordinario, che insiste sulla nozione dei *assi* o *vertici* d'una figura solida — p. es. di un tetraedro orientato, di un tetraedro, ecc. — oltre che molto più generale, in quanto si presta così tale e quale (salvo il diverso significato dei termini, che stanno in vece di isomeria, congruenza, ecc.) a vari altri uffici consimili: p. es. alla distinzione fra le *omografie* e le *autiomografie*, nel dominio della Geom.^a proiettiva complessa.

P 28 — Tr. « Qualunque moto che tenga fermo un punto è di rotazione (e non è identità) ». — EULERO, *Form. gen. pro transl. corp. rigid.* [Da P 86 § 6, P 22, 26, 27, ecc.].

P 29 — Tr. « Il prodotto di due o più congruenze (quali che siano) è di nuovo una congruenza ». [Poi che vi sono tre specie di moto (astrazione fatta dall'identità), o cioè rotazione, traslazione ed elicomozione, conviene distinguere sei casi. Il prodotto di due rotazioni si è già contemplato in P 1, 3, 7, quando gli assi coincidono, oppure sono concorrenti, o paralleli: resta l'ipta., che gli assi u e v delle due componenti \mathcal{R} o \mathcal{Q} siano due rette sghembe. Allora — preso in u un punto A a piacere, e tolto $A' = \mathcal{Q}A$ — il prodotto della rotazione \mathcal{Q} , per la traslazione di A' in A , normale all'asse di quella, è una certa rotazione \mathcal{R}_u intorno a qualche altro asse u parallelo a v (P 8) e contenente A : per la qual cosa $\left\{ \begin{smallmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{A}' \end{smallmatrix} \right\} . \mathcal{Q} . \mathcal{R} = \mathcal{R}_u . \mathcal{R}$; e il secondo membro sarà una nuova rotazione \mathcal{Q}_t intorno a qualche altra retta t uscente da A (P 3). Dunque $\mathcal{Q} . \mathcal{R} = \left\{ \begin{smallmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{A}' \end{smallmatrix} \right\} . \mathcal{Q}_t$; e p. cons. il prodotto $\mathcal{Q} . \mathcal{R}$ sarà in ogni modo una rotazione, o un'elicomozione (P 8, 21, 24). — Il prodotto di due traslazioni sarà sempre una traslazione, o un'identità (P 37 § 6). — Di poi le P 8, 21, 24 contemplano le varie ipt. di rotazioni, precedenti o seguite da traslazioni. — Infine ciascuna delle altre combinazioni (prodotto di due elicomozioni, oppure di elicomozione per traslazione o rotazione) si risolve sempre in prodotto di rotazioni e traslazioni, grazie a P 21].

P 30 — Tr. « Ogni volta che si compongon fra loro una congruenza e un'anticongruenza, il prodotto è sempre un'anticongruenza ». [Se la congruenza \mathcal{C} e l'anticongruenza \mathcal{C}_1 producessero una congruenza \mathcal{C}' — vale a dire se $\mathcal{C}\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}'$, oppure $\mathcal{C}\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}'$ — ne verrebbe $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}'\mathcal{C}^{-1}$, o $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}'\mathcal{C}'^{-1}$, dove \mathcal{C}^{-1} è ancora una congruenza (P 27); contro P 29].

P 31 — Tr. « Il prodotto di due anticongruenze quali che siano appartiene alla congruenza ». [Il prodotto di due specchiamenti non può esser che identità, rotazione o traslazione (P 4 § 4, P 5). Il prodotto delle antitrazioni $\mathcal{R}\mathcal{N}$ ed $\mathcal{R}'\mathcal{N}'$ (P 9) — dove \mathcal{R} ed \mathcal{R}' denotano gli specchiamenti a due piani arbitrari σ e σ' , ed \mathcal{N} ed \mathcal{N}' son rotazioni intorno a due assi rispettivamente normali a quei piani — equivale ad $\mathcal{N}(\mathcal{R}\mathcal{R}')\mathcal{N}$ (ivi), dove i fattori son tutti e tre congruenze. — Per egual modo un'antitrazione $\mathcal{R}\mathcal{N}$, preceduta o seguita da un'antitraslazione $\mathcal{R}\mathcal{N}$ (P 17) — \mathcal{R} e \mathcal{N} essendo una rotazione e una traslazione, parallelo rispettivamente ai due piani σ e π — produce le congruenze $\mathcal{N}(\mathcal{R}\mathcal{N})\mathcal{N}$ ($\mathcal{R}\mathcal{N}(\mathcal{R}\mathcal{N})\mathcal{N}$) (P 29, ecc.). — Gli altri casi al Lettore].

P 32 — Tr. « Due figure piane isomere son sempre omologhe per congruenza ». [Se l'isomeria onde si passa dall'una all'altra figura non è congruenza, basterà farla seguir dallo specchiamento nel piano della seconda di esse (P 31): ecc. ecc.]. Così resta giustificato l'epiteto di 'congruenti', che imponemmo per definizione a figure piane 'isomere' sin dal § 4° (P 36 § 4).

P 33 — Tr. « Una sola $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{congruenza} \\ \text{anticongruenza} \end{smallmatrix} \right\}$ è capace di sovrapporre la terza

« costituita in un punto A, in un raggio $|AB$ che muova da questo punto, e in un semipiano $(AB)C$ terminato alla retta AB (essendo A, B, C tre punti non collineari), ad un'altra terna consimile $A', A'B', (A'B')C'$ ». [Così da P 39, 43 § 4. avuto riguardo alle P 27, 30]. — E di qui tosto anche l'altra:

P 34 — Tr. « Sono eguali tra loro due $\left. \begin{matrix} \text{congruenze} \\ \text{anticongruenze} \end{matrix} \right\}$, che sovrappongon, sì l'una che l'altra, una data terna di punti non collineari ad una medesima terna di punti ».

§ VIII.

Sensi o versi d'una retta e d'un cerchio. Ascissa. Rappresentazione della retta sul numero reale. Distanza di due punti. Continuità della retta.

P 1 — Df. « Premesso che A e B sono punti diversi l'uno dall'altro, ed X è un punto arbitrario di AB , con la frase « seguente X nel senso $A \rightarrow B$, o da A verso B » — condensata in « $\sigma_{A,B} X$ » — si vuol denotare: 1) la figura « $|AB \sim |AX|$ », che nasce escludendo dalla semiretta A per B tutti i punti del segmento $|AX|$, se X appartiene ad $|AB|$; 2) la figura « $|XA \sim |X$ », che nasce escludendo dal raggio X per A il solo punto X, se X non appartiene ad $|AB|$. Ved. P 10, 29 § 3 ». — Resta così definito un certo segno di funzione o trasformazione $\sigma_{A,B}$ (seguente nel verso $A \rightarrow B$), che mosso innanzi ad un punto della congiungente A con B, qual ch'esso sia, produce su questa retta un'intera classe di punti. Una trasformazione si fa (della AB in classi di AB), che a ciascun punto X della retta subordina i punti rappresentati da $\sigma_{A,B} X$, prende nome di « senso $A \rightarrow B$, o — da A verso B ». Osservate che il senso $A \rightarrow B$ sarà un covariante di (A, B) rispetto a qualunque similitudine. Ecc.

P 2 — Tr. « Sotto lo stesso Ipt., il punto X (qual ch'esso sia) non appartiene a $\sigma_{A,B} X$; e cioè nessun punto è seguente di sé medesimo. E sarà inoltre palese che $\sigma_{A,B} A = |AB \sim |A$, $\sigma_{A,B} B = |AB \sim |AB|$; che A non segue alcun punto di $|AB|$, ma è seguente d'ogni altro punto di AB ; e che, quando X appartiene ad $|AB|$, ma è diverso da A, i suoi seguenti generan l'ombra di X da A, esclusa l'origine X ».

P 3 — Tr. « E, comunque sian presi i punti X ed Y sopra la retta AB , non si può dare ad un tempo, che Y sia seguente di X ed X seguente di Y nel senso $A \rightarrow B$. Ciò: non esistono due punti, ciascuno seguente dell'altro in un medesimo senso ». [Se i punti X ed Y giaccion, sì l'un come l'altro, nel raggio $|AB|$, le Ipt. $Y \circ \sigma_{A,B} X$ ed $X \circ \sigma_{A,B} Y$ involgon che Y non appartenga ad $|AX|$, nè X ad $|AY|$ (P 1), e p. c. che A appartenga ad $|XY|$ (P 15 § 3); ma ciò contraddice a P 33 § 3, poi che A è diverso da X e da Y (P 2)]. — Se X giace in $|AB|$ ma non Y, le condizioni $Y \circ \sigma_{A,B} X$ e $X \circ \sigma_{A,B} Y$ sono anziandò contraddittorie; poi che dalla prima si

esige che Y giaccia in $|AB$ come X (P 1). — Infine, se tanto X quante Y siano fuori di $|AB$, e perciò diversi da A — onde Y giace in $|AX$ ed X in $|AY$ (P 36, 34 § 3) — il supporre ad un tempo $Y \in |XA \sim; X \in X \in |YA \sim; Y$ (P 1) porterebbe ad $Y \in |AX \sim; A \sim; X$ ed $X \in |AY \sim; A \sim; Y$ (P 31 § 3): contro P 12 § 3].

P 4 — Tr. • Sempre che A, B siano punti diversi ed X, Y punti di AB , e « i due non coincidenti; allora delle due cose l'una: o Y sarà un seguente X , o X non seguente Y , nel senso $A \rightarrow B$. [Se uno dei punti X, Y coincide con A , la tesi è già stabilita in P 2: si può dunque concedere A diverso da X e da Y . Or, se ambedue questi punti cadono sul raggio $|AB$, sarà giocoferza che Y spetti ad $|AX|$, oppure X ad $|AY|$ (P 33 § 3): e nel primo caso X , in quanto escluso da $|AY|$ (P 12 § 3) ma giacente in $|AB$, sarà un $\sigma_{A,B} Y$ (P 1); nell'altro caso sarà similmente Y un $\sigma_{A,B} X$. — Di poi, se uno solo dei punti X ed Y — per es. X — giace nel raggio $|AB$, allora Y sarà punto esterno ad $|AX|$, ed X ad $|AY|$ (P 34, 29 § 3); quindi A giacerà fra X e Y (P 13, 10 § 3), e per cons. X nel raggio $|YA$ (P 29 § 3): onde $X \in \sigma_{A,B} Y$ (P 1). — Infine, supposto che tanto X quanto Y giacciano fuori di $|AB$, si deduce che Y sarà contenuto da $|AX|$ (P 36, 34 § 3); per la qual cosa dovrà Y appartenere ad $|AX|$, oppure X ad $|AY|$ (P 33 § 3); dunque Y ad $|XA$, oppure X ad $|YA$ (P 29 § 3), che è quanto dire ' $Y \in \sigma_{A,B} X$ oppure $X \in \sigma_{A,B} Y$ ' (P 1)].

P 5 — Tr. • Dati i punti A e B come sopra, se X, Y sono punti di AB , ed Y è seguente X nel senso $A \rightarrow B$, tutti i punti che segnano Y seguiranno anche X : cioè la figura $\sigma_{A,B} Y$ sarà contenuta dall'altra $\sigma_{A,B} X$. [Se X coincide con A , basta appellarsi a P 2, atteso che la figura $|AB \sim |AY|$ giace tutta in $|AB \sim; A$. Sia dunque X diverso da A : e in prime luogo X appartenga ad AB . Poi che $Y \in |AB \sim; |AX|$ per Ipt. (P 1) ed $A \sim; XY$ (P 33 § 3), bisogna che X appartenga ad $|AY|$ (P 15 § 3), e per cons. che $|AX|$ sia contenuto in $|AY|$ (P 19 § 3). Dunque $|AB \sim |AY| \supset |AB \sim |AX|$, vale a dire $\sigma_{A,B} Y \supset \sigma_{A,B} X$. — Appresso, poniamo che X non giaccia in $|AB$. Ora, da $Z \in |AB \sim; A$ si deduce, qualunque sia Z , che $|AZ| = |AB|$ (P 34 § 3); onde Z non appartiene ad $|AX|$, nè X ad $|AZ|$ (P 29 § 3), ma sì A ad $|XZ|$ (P 15 § 3); dunque Z ad $|XA$, e per cons. $|AB| \supset |XA$. Se pertanto Y giace in $|AB$, sarà vero che $\sigma_{A,B} Y \supset \sigma_{A,B} X$ (P 1). Ma potrà darsi che Y giaccia in $|XA \sim; |AB|$: allora $X \sim; |YA|$ ed $A \sim; XY$ (P 33, 36 § 3); quindi $Y \in |XA|$ (P 15 § 3) e per cons. $|YA| \supset |XA|$ (P 19 § 3). D'altra parte il supporre $A \sim; |YT|$ produce $A \sim; |XT|$, qualunque sia T (P 14 § 3), dal momento che $A \sim; |XY|$. Dunque $|YA| \supset |XA|$ (P 29 § 3) e per cons. $\sigma_{A,B} Y \supset \sigma_{A,B} X$ (P 1)].

P 6 — Df. • Ferma stante l'Ipt. fondamentale circa A, B, X (P 1), si dice « che un punto Y della medesima retta AB « precede X », o è « un precedente » X nel senso (o rispetto al senso) $A \rightarrow B$, qualunque volta X è un seguente « Y » a tener di quel senso. Insomma la frase « precedente rispetto al senso » $A \rightarrow B$ non è che un modo per significare la trasformazione inversa di $\sigma_{A,B}$. Ved. P 1. — Le P 3, 4 permettono allor di concludere a vista, che: « Precedono X tutti i punti di AB che non appartengono a $\sigma_{A,B} X$, nè si confondon con X ; e questi soltanto ». Di poi si dimostra che:

P 7 — Tr. • La figura « precedente Y nel senso $A \rightarrow B$ » non differisce « dalla figura « seguente X nel senso $B \rightarrow A$ ». O, in altri termini, la trasfor-

• mazione inversa di $\sigma_{A,B}$ si confonde col senso $B \rightarrow A$: $\sigma_{A,B}^{-1} = \sigma_{B,A}$. [Grazie a P 6 la figura 'precedente X nel senso $A \rightarrow B$ ' — o $\sigma_{A,B} X$ — non è altro che 'AB ~ $\sigma_{A,B} X \sim X$ '. Pertanto, se $X \in AB \sim A$ (com'è da supporre in primo luogo)

la figura $\sigma_{A,B} X$ sarà il complemento dell'ombra di X da A (P 2, 6), vale a dire $[XA \sim X$ (P 29, 30 § 3). Ora, poichè $A \sim [XB]$ (P 33 § 3), ciascuna delle condizioni $A \in [BY]$, $A \in [XY]$ sarà conseguenza dell'altra, rispetto ad Y (P 14 § 3); e di qui — nel supposto che X appartenga ad $[AB]$, e avuto riguardo alle P 18, 20, 29 § 3 — si deduce $[XA \sim X = [BA \sim BX]$; onde $\sigma_{A,B} X = [BA \sim BX] = \sigma_{B,A} X$ (P 1): conseguenza, che regge eziandio nell'ipta. $X = A$ (P 2). Ma potrà darsi che X appartenga ad $[AB \sim AB]$. Allora $B \in [XA]$ (P 29, 10 § 3) e p. cons. $[XA = [XB$

(P 29, 34 § 3); dunque $\sigma_{A,B} X$, che equivale (come abbiamo visto) ad $[XA \sim X$, coinciderà con $[XB \sim X$, vale a dire con $\sigma_{B,A} X$ (P 1), poi che X non appartiene a $[BA$ (P 29, 30 § 3). — Appresso, se X non appartiene ad $[AB]$, onde $X \in [BA$ (P 30 § 3),

la figura $\sigma_{A,B} X$ — che equivale ad $AB \sim [XB$ (P 1, 6), dal momento che $B \sim [AX]$ ed $X \sim [AB]$ (P 29 § 3), sicchè $A \in [XB]$ (P 15 § 3) o per cons. $[XA = [XB$ (P 34 § 3) — non differisce dalla figura $[BX \sim [BX]$, cioè da $\sigma_{B,X} X$: poi che si l'una che l'altra, aggiunte ad X, fanno l'ombra di X da B (P 29, 30 § 3). Ecc.] — Con argomentazioni in tutto simili a queste si proverebbe eziandio che:

P 8 — Tr. • Dati A, B, X come sopra e presi a piacer sulla retta due nuovi punti A' e B', purchè A' preceda B' nel senso $A \rightarrow B$; allora il senso $\sigma_{A',B'}$ non differisce dal senso $\sigma_{A,B}$: cioè $\sigma_{A',B'} X = \sigma_{A,B} X$, qualunque sia X. — Per la qual cosa, avuto riguardo a P 4, 7:

P 9 — Tr. • Se C e D sono punti arbitrari di AB, purchè non coincidenti, bisognerà che il senso $C \rightarrow D$ si confonda col senso $A \rightarrow B$, o col senso $B \rightarrow A$. — Insomma: ciascuna retta possiede due sensi l'un l'altro distinti, e non più di due: sensi, a cui ben s'addice il predicato di 'contrari' od 'opposti' fra loro, in virtù di P 7.

P 10 — Tr. • Nell'Ipta. P 8, la classe dei punti, che seggono A' e precedono B' nel senso $A \rightarrow B$, consiste nei punti che giacciono fra A' e B'. [Atteso che questi sono i punti comuni alle due figure $[A'B' \sim A'$ e $[B'A' \sim B'$ (P 31 § 3), vale a dire i punti comuni alle classi $\sigma_{A',B'} A'$ o $\sigma_{B',A'} B'$ (P 2) che non differiscono da $\sigma_{A,B} A'$ $\sigma_{B,A} B'$ (P 8)]. — Osservate ancora che:

P 11 — Tr. • Una traslazione, per cui la retta scorra su sè medesima, non altera mai nè l'un senso nè l'altro: laddove ogni simmetria della retta con sè medesima (se non ne rispecchia in sè stesso ogni punto) permuta i sensi fra loro. [Basterebbe provare il secondo comma, visto che ogni traslazione è il prodotto di due specchiamenti (P 5 § 7, ecc.): ma si lascia al Lettore. — Per si osserva che la traslazione di A in A' (P 35 § 6) — dove A' sia un punto arbitrario del raggio $[AB]$, l'origine esclusa — in quanto subordina i punti A' e A/A' ai punti A ed A' (P 39 § 6) e però converte il senso $A \rightarrow A'$ nel senso $A' \rightarrow A/A'$ (P 34 § 6, P 1), non altera $\sigma_{A,B}$: dal momento che, posto $A'' = A/A'$, ne risulta $A'' \in [AB \sim [AA']$ (P 34, 29, 12 § 3) e per cons. $\sigma_{A,B} = \sigma_{A',A''} = \sigma_{A',A'} X$ (P 2, 8)].

P 12 — Df. « Siano O, A, B tre punti non collineari, e B disti da O quanto A ; k sia il cerchio d'intersezione del piano OAB con la sfera di A , centro O .
 « Chiameremo « *semicerchio* A per B , centro O » — o succintamente « $O(AB)$ » — la classe dei punti, che il cerchio k ha in comune col semipiano « da OA verso B »; o « *arco* (AB) , centro O » — o più brevemente « $O(AB)$ » — la classe dei punti, che k ha in comune con l'angolo piano convesso $\hat{O}AB$. — I punti A ed A/O , ovvero A e B , saranno gli « *estremi* » del semicerchio $O(AB)$ e dell'arco $O(AB)$. « *Interni* » al semicerchio, ad all'arco, quei punti dell'una o dell'altra figura che non coincidono con detti estremi. Giaceono « fra A e B » un k' (sempre che A, B, O non collineino) i punti interni all'arco $O(AB)$, e questi soltanto. Ecc. ». Ved. P 39, 47 § 8; P 45 § 1, ecc.

P 13 — Df. « Dati O, A, B come sopra, e posto $A' = A/O, B' = B/O$; se X è un punto arbitrario del cerchio k (cioè della classe $OAB \cap A_{\infty}$ come dianzi), « per « *seguito* X nel senso $A \rightarrow B$, centro O » — locuzione simboleggiata in « $\sigma_{A \rightarrow B} X$ » — s'intende: 1) la classe dei punti interni al semicerchio $O(AB)$, ovvero al semicerchio $O(A'B')$ — se X coincide con A , ovvero con A' ; 2) la classe dei punti interni al semicerchio $O(XA')$ — se X è interno al semicerchio $O(AB)$; 3) la classe dei punti interni al semicerchio $O(XA)$ — se X è interno al semicerchio $O(A'B')$. — « *Precedente* X » (nel senso $A \rightarrow B$, centro O) si chiama ogni punto, il quale abbia X per seguito. Ved. P 12 e cfr. P 1, 6 ». — Poi che il cerchio k è la somma logica dei due semicerchi $O(AB)$ e $O(AB')$ (P 39, 44 § 3), sarà così definita una certa « trasformazione del cerchio in sé stesso » (e propriamente di k in classe di k), cui spetta il nome di « *senso* $A \rightarrow B$, centro O » compendiato nel simbolo « $\sigma_{A \rightarrow B}$ ». E se consideriamo che la dfnz. è simmetrica nelle due coppie di punti (A, B) e (A', B') ne possiamo tosto inferire che « $\sigma_{A \rightarrow B} = \sigma_{A' \rightarrow B'}$ »: cioè che l'inversione rispetto al centro del cerchio non altera i sensi di questo. — Si osservi ancora, che nessuna punto di k è seguito di sé medesimo nel senso $A \rightarrow B$, centro O . Ecc.

P 14 — Tr. « Sotto le stesse lpts., se un punto Y è seguito X nel senso « $A \rightarrow B$, (centro O) per certo X non potrà essere un seguito Y ». Cfr. P 3 [Pongasi $X' = X/O$ e $Y' = Y/O$. Se $X = A$ o p. e. $Y = O(AB \sim A \sim A')$ (P 13), i punti X o A' giaceranno da bande opposte di OY (P 38 § 3); onde X , come escluso dal semipiano $[(OY)A'$, non potrà stare nel semicerchio $O(YA')$ (P 12): che è quanto dire $X \sim \sigma_{A \rightarrow B} Y$ (P 13). Se il punto X sarà interno al semicerchio A per $(B$ centro O) allora Y , come seguito di X , non potrà esser che interno all'arco $O(XA')$, oppure interno ad $O(A'X')$, ovvero uguale ad A' (P 13) — dal momento che $O(XA') = O(XA'') \cup O(A'X')$, qualunque sia X (P 12, ecc). Ma nel primo caso X e A' , nel secondo X ed A , giaceranno da bande opposte di OY : onde X escluso dal semicerchio $O(YA')$, ovvero dal semicerchio $O(YA)$ (P 12); mentre nel terzo caso X cadrà fuori del semicerchio $O(YB')$ e in tutti e tre si verifica che $X \sim \sigma_{A \rightarrow B} Y$. — Infine, se $X = A'$, o interno al semicerchio $O(A'B')$, si ritorna sui casi già contemplati, a traverso lo scambio di A con A' e di B con B' (P 13)]. — Con la stessa facilità si dimostra che:

P 15 — Tr. « Presi a piacere sul cerchio k due punti X ed Y , pur che diversi « fra loro e non simmetrici rispetto ad O , delle due cose l'una: o Y sarà un se-

« seguente X, o X un seguente Y nel senso $A \rightarrow B$ (centro O) ». Cfr. P. 4. [Se X coincide con A, la Tesi è vera senz'altro, però che A precede ogni punto interno ad O(AB) e segue ogni punto interno ad O(A'B') (P 13). E se tanto X quanto Y sono interni al semicerchio O(AB), sarà Y un seguente X, ed X un seguente Y, secondo che Y giace nell'arco O(XA'), o nell'arco O(XA): e inverso nel secondo caso i punti A ed X, al pari degli A, A', si troveranno da bande opposte di OY, e p. c. A ed X dalla stessa banda; onde $X \in O(YA)$, ecc. Di poi, supposto X interno ad O(AB), ma Y interno ad O(A'B'), sarà Y un seguente X, oppure X un seguente X, secondo che Y giace nell'arco O(A'X') o nell'arco O(XA): e inverso nel secondo caso i punti A' ed X, al pari di A' ed A, si troveranno da bande opposte di OY, e p. c. A ed X dalla stessa banda; onde $X \in O(YA)$, ecc. Gli altri casi possibili — vale a dire $X = A'$, ovvero $X, Y \in O(A'B') \sim A' \sim A$, ovvero $X \in O(A'B') \sim A' \sim A$ e $Y \in O(AB) \sim A \sim A'$ — si riportano a quelli testè contemplati, mercè lo scambio di A con A' o di B con B', che non altera il senso $A \rightarrow B$]. Ne viene che:

P 16 — Tr. « I punti del cerchio, che nel senso $A \rightarrow B$ (centro O) precedono X, sono i punti del cerchio, i quali non seguono X, nè coincidono con X ed X': così che di due punti arbitrari di k , purchè non coincidenti fra loro, nè diametralmente opposti, uno deve precedere e l'altro seguire ». — Per la qual cosa, ogni volta che $Y \in \sigma_{O, A, B} X$, il punto Y' (P 14) — in quanto escluso dal semicerchio O(XY) e diverso da X e da X' — dovrà precedere X; quindi Y dovrà precedere X'.

P 17 — Tr. « E, sul cerchio k (P 12), la trasformazione « precedente, « rispetto al senso $A \rightarrow B$ » — cioè $\sigma_{O, A, B}^{-1}$ (P 13) — non si distingue dal « senso $B \rightarrow A$ ». Cfr. P. 7. [Se $X = A$, la figura $\sigma_{O, A, B}^{-1} X$ è lo stesso che O(AB') $\sim A \sim A'$ (P 16) e però si confonde con $\sigma_{O, B, A} X$ (P 13). Se $X \in O(AB) \sim A \sim B$, dunque interno al semicerchio O(BA), la figura $\sigma_{O, A, B}^{-1} X$ — vale a dire O(XA) $\sim X \sim X'$ — coincide con O(XB') $\sim X \sim X'$, che è precisamente $\sigma_{O, B, A} X$: atteso che i punti A e B saranno allora da bande opposte di OX, e per cons. A e B' dalla stessa banda. E se $X \in O(BA') \sim B \sim A'$, dunque interno al semicerchio O(BA'), la figura $\sigma_{O, A, B}^{-1} X$ — vale a dire O(XA) $\sim X \sim X'$ — non differisce da O(XB) $\sim X \sim X'$, cioè da $\sigma_{O, B, A} X$; però che B ed A', al pari di A ed A', saranno allora da bande opposte di OX, e quindi A e B dalla stessa banda. Appreso, se $X = B$, l'eguaglianza $\sigma_{O, A, B}^{-1} X = O(BA) \sim B \sim B'$ prova senz'altro che $\sigma_{O, A, B}^{-1} X = \sigma_{O, B, A} X$. Infine se $X = A'$, oppure X interno ad O(A'B'), sarà già dimostrato che $\sigma_{O, A, B}^{-1} X = \sigma_{O, B, A} X$, e per cons. che $\sigma_{O, A, B}^{-1} X = \sigma_{O, B, A} X$ (P 13)]. — E si potrebbe ormai riscontrare che:

P 18 — Tr. « Sotto le stesse Ipt., e se C e D sono altri punti del cerchio k , non coincidenti fra loro, nè diametralmente opposti, il senso $\sigma_{O, C, D}$ si confonde « necessariamente col senso $\sigma_{O, A, B}$, o col senso $\sigma_{O, B, A}$, secondo che C precede o « segue D nel senso $A \rightarrow B$, centro O ». Cfr. P. 9. — La defn. P 13 dell'ordine chiuso (nei punti d'un cerchio, o nei raggi d'un fascio) non cede per simmetria ed eleganza al paragone di tutte le altre a me note (Cfr. per es. B. LEVI, 'Sul-

l'equivalenza diretta e inversa delle figure, in Periodico di Matematica, XIX, (1904); e i teoremi che ne derivano non sono proprii, men semplici di quelle, che si riferiscono all'ordine aperto nei punti d'una medesima retta (P 1-11). Per altro codesto senso circolare o angolare (da non confonder con gli ordinamenti naturali e coi sensi d'un fascio di rette) non possiede tutte le qualità del senso lineare: per es. l'operazione significata da $\sigma_{n,n}$ non è transitiva, cioè non consente un teorema come sarebbe P 5.

P 19 — *Df.* — Allorquando fra i punti d'una figura e la serie dei numeri naturali più aver luogo una corrispondenza perfetta, si vuol dire che quella figura è una « classe numerabile » di punti. E se i punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$ d'una medesima classe numerabile (ciascuno essendo l'omologo del proprio indice) giacciono tutti allineati, e si svolgono ordinatamente in uno dei sensi che spettano al loro sostegno (P 9) — di guisa che il punto P_{n+1} segua il punto P_n in quel senso, qualunque sia l'indice n — allora la classe ordinata $\{P\} \equiv P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$ prende nome di « progressione » (*Fundamentalreihe*, secondo G. CANTOR). Anzi, una volta assegnati sopra la retta due punti A e B (A diverso da B) la progressione $\{P\}$ sarà da chiamare « ascendente », ovvero « discendente », rispetto al senso $A \rightarrow B$, secondo che P_{n+1} è seguente o P_n nel senso $A \rightarrow B$, o ver nel senso $B \rightarrow A$; cioè secondo che P_{n+1} segue o precede P_n nel senso $A \rightarrow B$ (P 1, 7, 8). — Un punto S della retta AB dicasi « limite superiore » d'una progressione $\{P\}$ ascendente nel senso $A \rightarrow B$, se S non precede alcun punto di $\{P\}$ nel senso $A \rightarrow B$; ma fra S ed un punto che lo preceda, qual ch'esso sia — cioè fra S e ciascun $\sigma_{n,n}S$ — giace sempre alcun punto di $\{P\}$. Similmente un punto I della AB sarà « limite inferiore » d'una progressione $\{Q\} \equiv Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n, Q_{n+1}, \dots$ discendente rispetto al senso $A \rightarrow B$, qualunque volta I non segue alcun punto di $\{Q\}$ nel senso $A \rightarrow B$; ma fra I ed un punto che gli succeda, qual ch'esso sia — cioè fra I e ciascun $\sigma_{n,n}I$ — giace sempre alcun punto di $\{Q\}$. — I concetti di « senso », di « progressione », di « limite superiore o inferiore » sono invarianti rispetto a qualunque similitudine — tali essendo i concetti di sfera, di retta, di segmento, di raggio, ecc. ». Ved. § 4, P 1 o 2.

P 20 — *Tr.* — Due limiti $\left. \begin{matrix} \text{superiori} \\ \text{inferiori} \end{matrix} \right\}$, l'un l'altro distinti, d'una medesima « progressione $\left. \begin{matrix} \text{ascendente} \\ \text{discendente} \end{matrix} \right\}$ non possono coesistere ». [Poniamo che i punti S ed S', qualunque diversi fra loro, sian limiti superiori d'una medesima progressione $\{P\}$ ascendente nel senso $A \rightarrow B$ (P 19). Uno di essi dovrà seguir l'altro in quel senso (P 4): sia per es. S' un seguente di S. Per l'ipotesi S non precede alcun punto di $\{P\}$, ma fra S ed S' deve cader qualche punto di $\{P\}$ (P 19). Ora questi due fatti sono contraddittori, in virtù di P 6, 10].

P 21 — *Tr.* — Sempre che A, B sian punti distinti e qualunque siano gli « interi positivi » ed i , sempre il punto δ_i , — cioè l' i -esimo punto ipermedi di A, B verso A (P 18 § 4) — precede il punto δ_{i-1} e segue il punto A nel senso $A \rightarrow B$: mentre il punto δ_{i+1} (lvi) seguirà sempre il punto δ_{i+1} . [Dal fatto che i punti ipermedi e i mediosimmetrici di A, B verso A sono tutti nel raggio A per

B (P 18 § 4), mentre il punto δ_i giace fra i punti δ_{i-1} ed A (P 11 § 3), e δ_{i-1} fra δ_{i-2} ed A (P 18, 16 § 4) si ritrae che $\delta_{i-1} \in [AB \sim [A\delta_i]$, e $\delta_{i-2} \in [A\delta_{i-1}] \sim [A\delta_{i-1}]$ (P 12 § 3); ossia che $\delta_{i-1} \in \sigma_{A, \delta_i} \delta_i$, e $\delta_{i-2} \in \sigma_{A, \delta_{i-1}} \delta_{i-1}$ (P 1): ecc.]

P 22 — Tr. « E la serie dei punti $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots, \delta_i, \delta_{i+1}, \dots$ — cioè « dei punti ipermеди di A, B verso A (P 18 § 4), ordinati secondo i valori crescenti dell'indice — costituisce in [AB] e rispetto al senso $A \rightarrow B$ una progressione discendente, che ha il punto B come origine, e il punto A per limite inferiore. Ved. P 19 ». [Invero quei punti sono ordinati nel senso $B \rightarrow A$ e tutti seguono A nel senso $A \rightarrow B$ (P 7, 21). Di più, se C è un punto arbitrario di AB, qualche punto ipermеди di A, B verso A dovrà cadere senza fallo tra i punti A e C (P 20 § 4): onde basta appellarsi a P 19].

P 23 — Tr. « Di nuovo essendo A e B punti distinti, ciascuna punto A' del « raggio [AB, tutto che dato ad arbitrio, è sempre limite inferiore d'una progressione di punti $\delta_{i,j}$ — cioè di medio-simmetrici della coppia (A, B) — discendente rispetto al senso $A \rightarrow B$ ». [Se $A' = A$, basterebbe invocare la P 22, richiamandosi a P 18 § 4: si può dunque conceder che A' ed A sian diversi fra loro. La traslazione di A in A', non alterando il senso $A \rightarrow B$ (P 11), converte la progressione $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$ testè coasiderata (P 22) in un'altra progressione (eziandio discendente) $\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2, \dots$: la quale avrà il punto A' per limite inferiore (P 19), e giacerà tutta in [AB, dal momento che i nuovi punti, come seguenti di A', dovranno seguire anche A (P 2, 5). Or nell'insieme dei punti medio-simmetrici di A, B verso A, che giusta P 21 § 4 cadranno fra due elementi consecutivi quali che siano della nuova serie — p. es. fra δ'_n e δ'_{n+1} , n essendo un numero intero positivo — si nota quelli, per cui la somma degli indici i, j (P 18 § 4) prenderà il valor minimo; e di tra questi si sceglia il punto a cui spetta il minimo valore del secondo indice j , e sia p. es. δ_{i_0, j_0} . Un tal punto è determinato ed unico per ciascun indice n ; e si può dimostrar che la serie (di punti medio-simmetrici):

$$\delta_{i_0, j_0}, \delta_{i_1, j_1}, \dots, \delta_{i_n, j_n}, \dots$$

è ancora una progressione discendente rispetto al senso $A \rightarrow B$, ed ammetta lo stesso punto A' per limite inferiore. Invero il punto $\delta_{i_{n+1}, j_{n+1}}$, giacendo fra i punti δ'_{n+1} o δ'_{n+2} , è obbligato a precedere il punto δ'_{n+1} (P 10) e p. const. anche il punto $\delta_{i_{n+1}, j_{n+1}}$ che sta fra δ'_n e δ'_{n+1} (P 5, 7, 10). Di più $\delta_{i_{n+1}, j_{n+1}}$ sarà sempre un seguente di A' al pari di δ'_{n+1} (P 5): e se C' è un seguente di A', e però qualche punto della progressione $\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2, \dots$ giace fra A' e C' (P 19) — per es. il punto δ'_n , quindi anche i punti $\delta'_{n+1}, \delta'_{n+2}, \dots$ — senza fallo anche i punti $\delta_{i_{n+1}, j_{n+1}}, \delta_{i_{n+2}, j_{n+2}}, \dots$ cadranno fra A' e C']

P 24 — Tr. « I punti $\delta_{i,j}$ e $\delta_{i+1, j+1}$ coincidono, qualunque siano gli indici i, j . Ved. P 18 § 4 ». [Invero dal fatto che $\delta_{i,j} = A[\delta_i]$ (ivi) si deduce $\delta_i = A[\delta_{i+1}]$ (P 45 § 1) che è quanto dire $\delta_{i,j} = \delta_{i+1, j}$. Inoltre $\delta_{i,j} = \delta_{i+1, j}$ (ivi): sicchè basterà dimostrare che dalle ipta. $\delta_{i,j} = \delta_{i+1, j+1}$ e $\delta_{i,j+1} = \delta_{i+1, j+1}$ nasce che $\delta_{i,j+1} = \delta_{i+1, j+1}$. Ora, poi che in ipta. abbiamo che $\delta_{i+1, j+1} = \delta_{i+1, j+1-1} / \delta_{i+1, j+1-1} + \delta_{i+1, j+1-1} / \delta_{i+1, j+1}$, e $\delta_{i+1, j+1} = \delta_{i+1, j+1} / \delta_{i+1, j+1-1}$, bisognerà che $\delta_{i+1, j+1-1} / \delta_{i+1, j+1-1} = \delta_{i+1, j+1-1} / \delta_{i+1, j+1}$: visto

che se fra i punti U, V, X, Y, Z intercedono le relazioni $V = U; X, X = V; Y = Y = X; Z$, la simmetria rispetto ad X , in quanto scambia fra loro i due punti V ed Y tenendo fermo X , dovrà permutare l'un l'altro anche i punti X, V ed X, Y , vale a dire $U = Z$; onde $X = U; Z$. Ma per il supposto induttivo $\delta_{i+1, i+1} \delta_{i+1, i+1} = \delta_{i+1, i+1} \delta_{i+1, i+1}$; dunque $\delta_{i+1, i+1} = \delta_{i+1, i+1} \delta_{i+1, i+1} = \delta_{i+1, i+1}$. c. d. d.]

P 25 — Tr. « La classe dei punti $\delta_{i, i}$, presi nell'ordine in cui va crescendo il numero $i:2^i$, risulta ordinata nel senso $A \rightarrow B$. [Invero da $i:2^i < i':2^i$ e secondo che $i < i'$, o $i = i'$, o $i > i'$, si deduce rispettivamente $i:2^i < i':2^i$, $i:2^i = i':2^i$, $i:2^i > i':2^i$. Ma nel primo caso il punto $\delta_{i, i}$ coinciderà col punto $\delta_{i', i'}$ e nel terzo caso il punto $\delta_{i, i}$ col punto $\delta_{i', i'}$ (P 24): dunque il punto $\delta_{i, i}$ sarà sempre un $\delta_{i', i'}$ (P 21)].

P 26 — Tr. « Se, per qualunque valore (intero e positivo e nullo) degli indici i ed i' si coordina al punto $\delta_{i, i}$ (P 18 § 4) la frazione $i:2^i$; e, viceversa, a ciascun numero razionale (positivo e nullo) del tipo $i:2^i$ il punto $\delta_{i, i}$; nasce una corrispondenza perfetta (univoca e reciproca) tra la classe dei punti medio-simmetrici di A, B verso A e quella delle frazioni ordinarie, il cui denominatore è una potenza del 2 (cioè dei numeri rappresentabili, sotto forma finita, « con le sole figure della numerazione binaria »). [Dalla defn. stessa dei punti medio-simmetrici (P 18 § 4) e dalle P 42, 44 § 1 è palese, che due numeri interi (positivi o nulli) i ed i' , tutto che dati ad arbitrio, spettano sempre ad un punto di detta classe in qualità di primo e secondo indice; e come tali non possono mai appartenere a più punti diversi. Inoltre se per le coppie di numeri (i, i) ed (i', i') , come sopra sussisterà l'eguaglianza $i:2^i = i':2^i$, bisognerà che i due punti $\delta_{i, i}$ e $\delta_{i', i'}$ coincidano; visto che i punti $\delta_{i, i}, \delta_{i+1, i+1}, \delta_{i+2, i+2}, \dots, \delta_{i+2^i-1, i+2^i-1}$ (se $i < i'$), ovvero i punti $\delta_{i, i}, \delta_{i-1, i-1}, \delta_{i-2, i-2}, \dots, \delta_{i-2^{i-1}, i-2^{i-1}}$ (se $i > i'$) si confondono tutti in un solo (P 24). E se per contrarie $i:2^i \neq i':2^i$, anche i punti $\delta_{i, i}$ e $\delta_{i', i'}$ saranno diversi fra loro, grazie a P 26 e P 1. Ecc., ecc.].

P 27 — Df. « Sempre che A, B siano punti e A diverso da B , per "ascissa" di un punto X qualsivoglia di AB , rispetto ad A come origine e a B come punto « unità » — ovvero « rispetto ad (A, B) » senz'altro — s'intende: 1) il numero $i:2^i$, se X appartiene alla classe dei punti medio-simmetrici di A, B verso A (P 18 § 4); 2) il limite per $n = \infty$ delle frazioni ordinarie decrescenti $i_n:2^{i_n}$, « $i_n:2^{i_n}, i_n:2^{i_n}, \dots, i_n:2^{i_n}, \dots$ » già contemplate in P 23 e subordinate a ciascun punto δ di AB (ivi), se X appartiene alla semiretta A per B , ma non alla classe dei punti $\delta_{i, i}$; 3) il numero $-x'$, se X non appartiene ad AB , ed x' sia l'ascissa « del suo simmetrico rispetto ad A » (ved. P 36 § 8). — I numeri $i_n:2^{i_n}, i_n:2^{i_n}, i_n:2^{i_n}, \dots$ sono le ascisse dei punti $\delta_{i_n, i_n}, \delta_{i_n+1, i_n+1}, \delta_{i_n+2, i_n+2}, \dots$, che — giusta una legge assegnata in P 23 — costituiscono una progressione discendente rispetto al senso $A \rightarrow B$, e avente X per limite inferiore. — Osservato, che anche il punto $\delta_{i, i}$ (gl'indici i ed i' essendo dati a piacere) può sempre aversi come limite inferiore d'una progressione si fatta (P 23); e che in tal caso il limite delle frazioni $i_n:2^{i_n}$ per $n = \infty$ eguaglia precisamente l'ascissa del punto stesso, cioè la frazione $i:2^i$. [Invero, se p. es. il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i_n}{2^{i_n}}$, che chiameremo A , fosse minore di

$l:2^k$, qualche numero della serie decrescente $l_0:2^k, l_1:2^k, \dots, l_n:2^k, \dots$ — p. es. $l_n:2^k$ — dovrebbe esser compreso fra h ed $l:2^k$; dunque il punto $\delta_{l_n:2^k}$, spettante alla progressione onde si parla, precederebbe (nel senso $A \rightarrow B$) il limite inferiore $\delta_{l:2^k}$ di questa (P 25), contro P 19. E se per l'opposto $l:2^k$ fosse minore di h , allora, presa a piacer la frazione ordinaria $p:2^k$ in maniera, che $l:2^k < p:2^k < h$, il punto $\delta_{p:2^k}$ dovrebbe seguire il punto $\delta_{l:2^k}$ o precedere i punti $\delta_{l_n:2^k}$, qualunque sia n (P 25): cosicchè nessun punto della progressione $\delta_{l_n:2^k}, \delta_{l_1:2^k}, \dots, \delta_{l_0:2^k}, \dots$ giacerebbe fra il limite inferiore $\delta_{l:2^k}$ o il punto $\delta_{p:2^k}$ (P 19), contro P 19]. — È altresì manifesto che « Se per effetto d'una similitudine i punti A, B, X verranno in A', B', X' , l'ascissa del punto X rispetto ad (A, B) sarà uguale all'ascissa del punto X' rispetto ad (A', B') ». — In questo modo a ciascun punto X della AB corrisponde un certo numero reale (l'ascissa di X) positivo, negativo, o nullo: e così la retta AB si rappresenta univocamente sulla classe dei numeri reali o finiti. Il valore zero dell'ascissa spetta all'origine A' di AB , il valore uno al punto B ; i numeri due, tre, quattro, ... saranno le ascisse di A/B e degli ultrasimmetrici A_1, A_2, \dots di A rispetto a B (P 16 § 4): ecc. — Se non che dai principi svolti sin qui — cioè dallo solo premesso I-XXIII — non appare che l'anzidetta rappresentazione numerica sia *conservativa* o *reciproca* nelle due classi ' AB ' e ' n numero reale finito': vale a dire che ciascun numero reale o finito, tutto che dato ad arbitrio, sia sempre ascissa d'un qualche punto di AB . È questo un fatto, che risulterà dal princ. XXIV ed ultimo. Ma la rappresentazione onde si parla è senza fallo *isomorfa*; ossia non potrà coordinare un medesimo numero (razionale o irrazionale) a due punti diversi. In altri termini:

P 28 — 7r. « Sotto la stessa Ipts., le ascisse che spettano a punti diversi di « AB sono sempre diverse fra loro ». « Dopo ciò che si è visto in P 25, 27 basterà dimostrare, obo se due punti non coincidenti I ed I' son limiti inferiori di due progressioni discendenti rispetto al senso $A \rightarrow B$:

$$\eta) \delta_{l_1:2^k}, \delta_{l_2:2^k}, \delta_{l_3:2^k}, \dots, \delta_{l_n:2^k}, \dots \text{ o } \eta') \delta_{l'_1:2^k}, \delta_{l'_2:2^k}, \delta_{l'_3:2^k}, \dots, \delta_{l'_n:2^k}, \dots$$

costruite a tenore di P 23, non potrà darsi che le due serie numeriche decrescenti:

$$e) \frac{l_0}{2^k}, \frac{l_1}{2^k}, \frac{l_2}{2^k}, \dots, \frac{l_n}{2^k}, \dots \text{ ed } e') \frac{l'_0}{2^k}, \frac{l'_1}{2^k}, \frac{l'_2}{2^k}, \dots, \frac{l'_n}{2^k}, \dots$$

abbian per limite uno stesso numero l . Invero — posto che I (ad es.) preceda I' nel senso $A \rightarrow B$ (P 4) — fra questi due punti dovrà cader qualche punto di $\eta)$, p. es. $\delta_{l_n:2^k}$ (P 19). Ora un tal punto precoderà tutti i punti della $\eta')$ (P 5); e però la frazione $l_n:2^k$ sarà minore di ognuna delle frazioni $e')$ (P 25); dunque minore od eguale al limite verso cui tendono per $n = \infty$. Cosicchè questo limite, come maggiore od eguale ad $l_n:2^k$, sarà certamente maggiore del limite verso cui tendono le altre frazioni decrescenti $e)$. Ecc.). — Anti abbiamo così dimostrato un teorema più generale, cioè:

P 29 — 7r. « E l'ascissa d'un punto arbitrario di AB (rispetto ad A come

• origine e a B come punto unità) è minore o maggiore di quella di un altro punto di AB, secondo che il primo precede o segue il secondo nel senso $A \rightarrow B$. — E in modo simile a questo si proverebbe che, se il medesimo punto I si offre eziandio come limite superiore o inferiore di qualche altra progressione, ascendente o discendente, $d''_{n_1}, d''_{n_2}, d''_{n_3}, \dots, d''_{n_k}, d''_{n_{k+1}}, \dots$ benché al tutto diversa da γ) e non conforme alla legge assegnata in P 23; ciò non di meno la serie numerica crescente o decrescente $l''_1:2^1, l''_2:2^2, l''_3:2^3, \dots, l''_k:2^k, \dots$ nelle ascisse corrispondenti a quei punti avrà sempre, per $n = \infty$, lo stesso limite che spetta alla serie c (P 28).

P 30 — Df. • Essendo X, Y punti arbitrari, purché diversi fra loro, e u un segmento prestabilito a piacere, che non si restringa in un punto; la frase “*distanza di Y da X secondo u*” (come “unità di misura”) — simboleggiata in “ $dst_u(X, Y)$ ” — sta invece di ascissa del punto Y rispetto ai punti X ed U, dove U sia quel punto del raggio |XY|, per cui succede che |XU| è congruo con u (P 41 § 4, P 37 § 2). Ma se i punti X ed Y coincideranno in un solo, allora $dst_u(X, Y)$ varrà per dfa. lo zero, qualunque sia u . — Se un'isomeria qualsivoglia traduce i punti X ed Y rispettivamente in X' e Y', la distanza di Y' da X', presa rispetto ad u , sarà sempre uguale a $dst_u(X, Y)$, qualunque sia u : per la qual cosa $dst_u(X, Y) = dst_u(Y, X)$. Così è che — una volta assegnata quell'unità di misura u (e perciò anche la classe dei segmenti congrui ad u) — ha un valore preciso la locazione — mutua distanza dei punti X, Y, o “*lunghezza*” del segmento |XY|; in cui si dovrà senza più riconoscere un invariante simmetrico di questi punti rispetto a qualunque isomeria. Anzi la P 28 fa fede che segmenti “congrui fra loro” e segmenti di “egual lunghezza” è tutt'uno.

P 31 — Tr. • Nell'anzidetta Ipt., se un punto Z appartiene al segmento |XY|, e fra le distanze dei punti X, Y, Z intercede la relazione “ $dst_u(X, Z) + dst_u(Z, Y) = dst_u(X, Y)$ ”. [In primo luogo suppongasi, che il punto Z appartenga alla classe dei medio-simmetrici di X, U verso X — p. es. $Z = d_{c,1}$ (P 18 § 4) — e che il simile avvenga del punto Y rispetto ai punti Z ed U — premesso che U giace in |ZY|, come U in |XZ|, per modo che tanto |ZU|, quanto |XU|, siano congrui con u — cioè che $Y = d'_{c,1}$, la lettera d' indicando i medio-simmetrici di Z, U verso Z: onde avremo che $dst_u(X, Z) = l:2^1$, e $dst_u(Z, Y) = l':2^1$ (P 30, 27). Inoltre sia p. es. $s > s'$: onde $Y = d'_{s,1-s'}$ (P 24). Ora la traslazione $d'X$ in Z (P 35 § 6), spostando |XZ| in |ZY| (P 11, ecc.) e p. cons. U in U', convertirà l'iesimo punto ipermedio di X, U verso X nell'iesimo punto ipermedio di Z, U' verso Z, cioè $d_{c,1}$ in $d'_{c,1}$; onde la traslazione di X in $d_{c,1}$, farà passar Z in $d'_{c,1}$, e però $\begin{pmatrix} d_{c,1} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_{c,1} \\ z \end{pmatrix}$ (P 36 § 6). D'altra parte $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{c,1} \\ z \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_{c,1} \\ z \end{pmatrix}$.

(P 18 § 4, P 30 § 6). Dunque $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{c,1} \\ x \end{pmatrix} + 2^{1-s'} l'$, e per conseguenza $Y = d_{c,1+2^{1-s'} l'}$.

(P 18 § 4): ossia (P 30) $dst_u(X, Y) = (l + 2^{1-s'} l') : 2^1 = (l:2^1) + (l':2^1) = dst_u(X, Z) + dst_u(Z, Y)$, c. v. d. — Di poi supponiamo che il punto Y sia dato come limite inferiore d'una progressione discendente $d'_{c,1}, d'_{c,2}, d'_{c,3}, \dots, d'_{c,n}, \dots$.

.... $\mathcal{F}'_{n-1}, \dots$ (P 23); di guisa che $\text{dst}_n(Z, Y)$ venga ad essere il limite delle frazioni ordinarie $\mathcal{F}_n: 2^n, \mathcal{F}_1: 2^1, \mathcal{F}_2: 2^2, \dots, \mathcal{F}_n: 2^n, \dots$ per $n = \infty$ (P 30, 27). Allora, se poniamo per brevità $Y_n = \mathcal{F}'_{n-1}, \mathcal{F}_n$, avremo per dimostrato che $\text{dst}_n(X, Z) + \mathcal{F}_n: 2^n = \text{dst}_n(X, Y_n)$ qualunque sia n , dove il secondo membro è l'ascissa del punto Y_n rispetto ad X come origine e ad U come punto unità (P 30); e passando al limite per $n = \infty$ si otterrà da una parte la somma $\text{dst}_n(X, Z) + \text{dst}_n(Z, Y)$, e dall'altra l'ascissa del punto limite Y rispetto ai punti X ed U (P 27), vale a dire il numero $\text{dst}_n(X, Y)$. — Appresso viene l'ip'ta., che il punto Z sia dato come limite inferiore d'una progressione discendente $\mathcal{Z}_{n+1}, \mathcal{Z}_{n+2}, \dots, \mathcal{Z}_{n+3}, \dots$; restando X, Y nelle condizioni testè accennate. Si può conceder che il punto \mathcal{Z}_{n+1} e i suoi successivi giacciono tutti fra X ed Y : per la qual cosa è certo che, da n in poi, $\text{dst}_n(X, Z_n) + \text{dst}_n(Z_n, Y) = \text{dst}_n(X, Y)$, se per Z_n intendiamo il punto \mathcal{Z}_{n+1} . Onde — passando il limite per $n = \infty$ — si dedurrà come dianzi $\text{dst}_n(X, Z) + \text{dst}_n(Z, Y) = \text{dst}_n(X, Y)$; visto che $\text{dst}(Z_n, Y) = \text{dst}(Y, Z_n)$, qualunque sia n , e che $\text{dst}(Y, Z) = \text{dst}(Z, Y)$. — Resta il caso che X si presenti come punto limite: ora ormai supplisce il Lettore].

P 32 — Tr. « Nell'ip'ta. di P 16 § 4, la distanza dei punti A e A_i sarà moltiplicata secondo i della distanza di A_i da A , qualunque sia l'unità di misura ». [Abbiamo da P 31 $\text{dst}(A, A_2) = 2 \text{dst}(A, A_1)$, e $\text{dst}(A, A_1) = \text{dst}(A, A_{1+1}) + \text{dst}(A, A_1)$; dal momento che $A_i \neq AA_i$, $\mathcal{A}_{i-1} \neq AA_i$, e $\text{dst}(A, A_i) = \text{dst}(A_1, A_2) = \dots = \text{dst}(A_{i-1}, A_i)$ (P 16 § 4, P 30). Onde il Tr. è vero per $i = 1, 2$; e supposto vero per $i = n-1$, sarà vero altresì per $i = n$. Ecc.].

P 33 — Tr. « Sempre che A, B siano punti distinti, se B' è un seguente B « nel senso $A \rightarrow B$, l'ascissa di qualunque punto del raggio AB rispetto ad A « come origine e a B come punto unità sarà sempre maggior che l'ascissa dello stesso punto rispetto ad (A, B') ». [Basterà che il Tr. si provi in ordine ai punti medio-simmetrici di A, B verso A . Ora indicando con $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_i, \dots$ i successivi punti ipermelli di A, B' verso A , il punto \mathcal{F}_i precederà senza fallo il punto \mathcal{F}_i' nel senso $A \rightarrow B$ (P 14 § 4, P 2-4, 6, ecc.); e, per la stessa ragione, il punto \mathcal{F}_i dovrà precedere al punto \mathcal{F}_i', \dots e il punto \mathcal{F}_i al punto \mathcal{F}_i' (Induct.). Dunque l'ascissa del punto \mathcal{F}_i rispetto ad A come origine e a B' come punto unità, sarà minore di $1:2^i$ (P 27); e l'ascissa del punto \mathcal{F}_i , essendo i volte maggiore di quella che spetta a \mathcal{F}_{i+1} (P 32, 30), sarà dunque minore di $1:2^i$, cioè dall'ascissa, che lo stesso punto ha rispetto ad (A, B) . Ecc.].

P 34 — Tr. « Cambiare il punto unità sulla retta, tenendo ferma l'origine » (P 27), equivale a divider l'ascissa di ciascun punto per quella del nuovo « punto unità ». In altri termini, se β è l'ascissa d'un punto B' rispetto agli A e B (sempre che questi punti A e B non coincidano e B' sia punto di AB , diverso anch'esso da A) fra le ascisse x ed x' di un medesimo punto X di AB (qual ch'esso sia), prese l'una rispetto ad A e B , l'altra rispetto ad A e B' , (P 27) intercede la relazione $x' = x:\beta$. [Distingueremo per mezzo di un apice i punti medio-simmetrici di A, B' verso A , da quelli di A, B verso A . — Grazie a ciò che precede, basterà che il Tr. si provi sotto l'ip'ta. che il punto X appartenga ai medio-simmetrici di A, B verso A : ad es. per $X = \mathcal{F}_{1/2}$ (P 18 § 4). 1) E in primo luogo si

supporrà che B' sia un punto ipermedie di A, B verso A; p. es. il punto $\delta_{A,1}$, di ascissa $\beta = 1:2^1$ rispetto ad (A, B) (P 27). Allora — se $i \leq h$ e p. c. $\delta_{A,i} = \delta_{A,h-i+1}$ (P 24) — mentre il punto $\delta_{A,1}$ diventa $\delta'_{A,1}$, il punto $\delta_{A,h-i+1}$ si converte necessariamente in $\delta'_{A,i-i+1}$ per effetto della sostituzione di B' a B: onde $x' = 2^{i-1}$, $i = (1:2^i):(1:2^h) = x:\beta$. E se per l'opposto $i > h$, ognun vede che il punto ipermedie δ_i si confonde col punto ipermedie δ'_{i-h} , e però $\delta_{i,h}$ con δ'_{i-h} ; sicchè $x' = 1:2^{i-h} = x:\beta$, come dianzi. — 2) Appresso poniamo che il punto B' sia il $(k-1)$ -esimo fra gli ultrasimmetrici di A rispetto a B (P 16, 17, § 4); vale a dire il punto $\delta_{A,k}$, di ascissa $\beta = k$ rispetto ad (A, B). Risulta da P 32 (qualunque sia l'unità di misura) che $\text{dst}(A, \delta_{A,k}) = k \text{ dst}(A, \delta_{A,1})$; e che similmente (avuto riguardo a P 17, 18 § 4) $\text{dst}(A, \delta_{A,1}) = 2^k \text{ dst}(A, \delta_{A,1})$; per la qual cosa $\text{dst}(A, B') = k \cdot 2^k \text{ dst}(A, \delta_{A,1})$. Di qui, tolto |AB| come unità di misura (P 30), $1 = k \cdot 2^k \text{ dst}_{|AB|}(A, \delta_{A,1})$. Dunque l'ascissa del punto $\delta_{A,1}$ rispetto ai punti A e B' viene ad essere uguale ad $1:(k \cdot 2^k)$ (Ivi), e quella del punto $\delta_{A,k}$ risulta $1:(k \cdot 2^k)$ (P 32). Dunque $x' = (1:2^k):k = x:\beta$. — 3). Ciò premesso, se avriem che B' coincida con uno qualsiasi dei punti medio-simmetrici di A, B verso A — per es. col punto $\delta_{A,k}$ di ascissa $\beta = k:2^k$ — basterà che B si trasferisca prima in $\delta_{A,1}$, e poscia in $\delta_{A,k}$. Per ciò che abbiamo visto in 1) o 2), il primo cangiamento avrà per effetto di moltiplicare l'ascissa x del punto X per 2^k , mentre il secondo farà divider per k l'ascissa $2^k x$ così alterata: onde $x' = x:(k:2^k) = x:\beta$. — 4) Resta il caso, che B' sia limite inferiore d'una progressione discendente $\delta_{A,1}, \delta_{A,2}, \delta_{A,3}, \dots, \delta_{A,n}, \dots$ a tenore di P 23. Pongasi $B'_n = \delta_{A,n}$ e $\beta_n = k_n:2^{k_n}$ (qualunque sia l'indice n); onde $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} (k_n:2^{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ (P 27), β essendo l'ascissa del punto B' rispetto ad (A, B) come

dianzi; e con x'_n si rappresenti l'ascissa del punto X rispetto ad (A, B'_n). Avremo, per ciò che si è dimostrato in 3), $x'_n = x:\beta_n$, $x'_1 = x:\beta_1, \dots, x'_n = x:\beta_n, \dots$; e il limite di queste frazioni (crescenti insieme con n) per $n = \infty$ sarà uguale ad $x:\beta$. Or se l'ascissa x' di X rispetto ad (A, B') fosse minore di questo limite, nell'intervallo fra i numeri x' e $x:\beta$ vi sarebbe per certe una qualche frazione x'_m relativa ad un punto B'_m della progressione anzidetta: il che non può darsi, atteso che il punto B' precede ogni punto di questa nel senso $A \rightarrow B$ (P 19), e per cons. x' è maggior di x'_m , qualunque sia n (P 33, 8). E se x' fosse maggior di quel limite, preso un punto — che chiamerò B'' — tra i medio-simmetrici di A, X verso A, al quale competa, rispetto ad A come origine e ad X come punto unità, un'ascissa compresa fra i numeri $1:x'$ e $\beta:x$ (com'è sempre possibile); la frazione reciproca di quest'ascissa — vale a dire, per quanto è già stabilito in 3), l'ascissa x'' del punto X rispetto ad (A, B'') — sarebbe minore di x' o maggiore di $x:\beta$; e però B'' seguente a B' nel senso $A \rightarrow B$ (P 33, 8, 4, ecc.): di guisa che fra B' e B'' dovrebbe giacer qualche punto della progressione $B'_1, B'_2, B'_3, \dots, B'_n, \dots$ ad es. B'_m; onde $x' < x'_m$ (P 33, 8, ecc.). Ma $x'_m < x:\beta$; dunque $x' < x:\beta$, o questo è contraddittorio. Pertanto $x' = x:\beta$. 5) Infine, se il punto B' non appartiene ad |AB|; allora, posto $B'_1 = B/A$, l'ascissa di X rispetto ad (A, B'_1) sarà uguale ad $x:1 = \beta$, β essendo anche qui l'ascissa del punto B' o però — β l'ascissa di B', rispetto ad (A, B).

Ma lo stesso numero x : $-\beta$ esprime anche l'ascissa del punto X/A rispetto ad (A, B) (P 27); dunque il numero opposto, cioè la frazione $x: \beta$, sarà l'ascissa di X rispetto ad (A, B) [ivi].

P 35 — Tr. — Se, essendo A, B, C tre punti non collineari, la retta che unisce i due punti D ed E situati rispettivamente sui lati $|AB|, |AC|$ del triangolo (o di vari fra loro) sia parallela al terzo lato, avrà luogo la proporzione: $\text{dst}(A, B): \text{dst}(A, D) = \text{dst}(A, C): \text{dst}(A, E) = \text{dst}(B, C): \text{dst}(D, E)$, qualunque sia l'unità di misura. Eucl., lib. 6°, prp. 11. [Se i due raggi $|AB|, |AC|$ si riferiscono tra loro punto per punto in maniera, che due punti omologhi quali che siano giacciono sempre sopra una retta parallela a BC (o coincidente con questa), e se U, V siano due punti omologhi scelti a piacere (pur che diversi da A); le ascisse dei punti B o D rispetto ad (A, U) saranno eguali alle ascisse dei punti C ed E (omologhi a quelli) rispetto ad (A, V) : atteso che da P 24 § 6 e Induct. si deduce, che l'1-mo punto ipermedio di A, U verso A corrisponde all'1-mo punto ipermedio di A, V verso A , e che sono omologhi ancora due punti medio-simmetrici della due classi ogni volta, che gl'indici non differiscono dall'uno all'altro (P 27). Or, se V è quel punto di AC , che dista da A quanto U , o sia tolto V in vece di U come punto unità, le nuove ascisse dei punti C ed E saranno eguali alle antiche, divise ciascuna per l'ascissa del punto V rispetto ad (A, V) (P 34): per la qual cosa, detti u e v i segmenti $|AU|, |AV|$, si avrà (P 30):

$$\text{dst}_u(A, B): \text{dst}_u(A, D) = \text{dst}_v(A, C): \text{dst}_v(A, E) = \text{dst}_u(A, C): \text{dst}_u(A, E)$$

Appresso si effettui la traslazione di D in B , per la quale E si trasferisce in un certo punto F di BC ed A in un certo punto G di AB : onde FG parallela ad EA , o le coppie (A, D) , (D, E) congruenti alle coppie (G, B) , (B, F) (P 35, 36, 38 § 6). Anzi il punto F , avendo rispetto a (B, C) la medesima ascissa di E rispetto ad (A, C) , sarà interno a $|BC|$ (P 10, 29); o così G interno a $|BA|$. Dunque, per quanto si è visto or ora $\text{dst}(B, A): \text{dst}(B, G) = \text{dst}(B, C): \text{dst}(B, F)$. Ma $\text{dst}(B, G) = \text{dst}(A, D)$, e $\text{dst}(B, F) = \text{dst}(D, E)$ (P 30); per la qual cosa: $\text{dst}_u(A, B): \text{dst}_u(A, D) = \text{dst}_u(B, C): \text{dst}_u(D, E)$; ecc.]

P 36 — Tr. — E se, viceversa, dai raggi $|AB|, |AC|$ si staccheranno i segmenti $|AB|, |AK|$, le cui lunghezze (non nulle) sian proporzionali a $\text{dst}(A, B)$ e $\text{dst}(A, C)$, la retta HK sarà parallela alla retta BC . Eucl., lib. 6°, prp. 11. [Se HK non è parallela a BC , nel raggio $|AC|$ vi sarà nondimeno un punto K' , per cui la retta HK' è parallela a BC (P 6 § 6, ecc.): dunque tale che $\text{dst}_u(A, B): \text{dst}_u(A, H) = \text{dst}_u(A, C): \text{dst}_u(A, K')$ (P 35, ecc.). Ma per Ipt. $\text{dst}_u(A, B): \text{dst}_u(A, H) = \text{dst}_u(A, C): \text{dst}_u(A, K)$ (P 30): dunque $\text{dst}_u(A, K') = \text{dst}_u(A, K)$. Onde i punti K e K' , benchè diversi fra loro, avrebbero ascisse uguali rispetto ad A come origine o a V come punto unità (P 30): il che non può stare (P 28)].

P 37 — Tr. — In qualsivoglia similitudine è costante il rapporto delle lunghezze di due segmenti omologhi. Ved. P 30. [Grazie a P 33 § 6, basterà che il Tr. si stabilisca in ordine all'omotetia $\begin{pmatrix} A' \\ O, A \end{pmatrix}$ (P 28 § 6), dove O, A, A' son punti

collineari e distinti, anzi A' appartiene ad OA . Ma in questo caso risulta da P 35, che le lunghezze di due segmenti omologhi quali che siano stanno fra loro nel rapporto $\text{dist}(O, A) : \text{dist}(O, A')$.

P 38 — Tr. — Se gli angoli $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ di un triangolo $[ABC]$ sono congrui e rispettivamente agli angoli $\hat{D}, \hat{E}, \hat{F}$ di un altro triangolo $[DEF]$, le lunghezze dei lati $[AB], [BC], [CA]$ del primo saranno proporzionali a quelle dei lati $[DE], [EF], [FD]$ del secondo. — EUCL., lib. 6°, prp. IV. [Per l'ipotesi esiste un'isometria che sovrappone l'angolo $\hat{D}, \hat{E}, \hat{F}$ all'angolo $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, traducendo D in A , e i punti E, F in due punti E', F' dei raggi $[AB], [AC]$ rispettivamente. E poiché, grazie a P 19 § 5, P 4 § 6, ecc., la retta $E'F'$ risulterà parallela a BC (seppur non coincida con questa), si ritorna a P 35. — Per la prp. reciproca si può argomentare come EUCL. al l'ogo cit.]. — Del resto, ciascuna di queste P 37 e P 38 è conseguenza dell'altra in virtù delle P 31, 34, § 6.

Dagli ultimi fatti sarebbe agevole cosa dedurre — presenti i §§ 1-6 — quasi tutte le prps. del lib. VI (non che dei lib. I-IV, come il Tr. di PITAGORA, ecc.) e quelle che ne derivano: intese per altro come *relazioni numeriche* fra le misure distanti di tre o più punti dall. Nè può rimanere alcun dubbio circa la possibilità di svolgere tutta quanta l'ordinaria Geometria Elementare dai soli principi I-XXIII; perchè in ordine all'*equivalenza* delle figure, alla *misura* delle aree e dei volumi, ecc. siamo liberi ormai di seguire, in tutto od in parte, le vie tracciate da F. SCHUR⁽¹⁾, RAUSENBERGER⁽²⁾, L. GÉRARD⁽³⁾, G. VERONESE⁽⁴⁾, D. HILBERT⁽⁵⁾; con facoltà di appellarsi alla misura delle *distanze* (P 30, 31, ecc.). Onde la Geometria Elementare — come Geometria 'del compasso', ovvero dei punti che si rispecchiano nel campo numerico Euclideo⁽⁶⁾ — si palesa anche qui indipendente dalla *continuità* della retta nell'accezione di G. CANTOR⁽⁷⁾, e in quella più comprensiva di R. DEDERKIND⁽⁸⁾ ed H. WEIER⁽⁹⁾. — Ma la necessità di qualche nuovo principio si fa innanzi ogni volta che ci proviamo a invertire la rappresentazione della 'retta' sul 'numero reale', qual'è definita in P 27: vale a dir se si vuole ch'«esistano punti, la cui distanza da un punto dato, secondo una data unità di misura, eguagli un numero prestabilito a piacere. Dopo quanto precede, il modo più naturale di giungere a questa inversione — o, come suol dirsi, a *distendere* la variabile numerica reale (escluso il valore 'infinito') sopra una retta arbitraria, così da ottenere una corrispondenza perfetta fra i

(1) Sitzungsberichten der Dorpater Naturforscher Gesellschaft, Jahrg 1892.

(2) Math. Annal., XLIII, 1893.

(3) Boll. de la Soc. Math. de France, XXIII, 1895.

(4) Atti del R. Ist. Veneto, VI-VII, 1894-95.

(5) Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal. Göttingen, 1899. — Vedi anche G. B. HALSTED, *Rational Geometry*, New-York, 1904 (Chap. X, XII).

(6) G. CANTOR, *Sulla risoluzione dei problemi geometrici, ecc.* in « Questioni di Geometria Elementare raccolte da F. ENRIQUES », Bologna, 1900.

(7) *Beiträge z. Begründ. d. transf. Mengenlehre*, Math. Annal. XLVI, 1895.

(8) *Steigheit u. Irration. Zahlen*, 1872.

(9) *Algebra*, 1898 (vol. I, cap. 4-12).

punti di questa e la classe dei numeri reali e finiti — sarà di accettare il seguente:

POSTULATO XXIV.

P 39. — *Sempre che A e B siano punti, A diverso da B; qualsivoglia progressione $\delta_{u,h}, \delta_{u,h}, \delta_{u,h}, \dots, \delta_{u,h}, \dots$ discendente rispetto al senso A \rightarrow B, che si può istituire nella classe dei punti medio-simmetrici di A, B verso A, possiede un limite inferiore. Ved. P 18 § 4, P 19.*

P 40 — Tr. — E data a piacere sulla retta una progressione ascendente, o discendente, rispetto al senso A \rightarrow B, esiste sempre per essa un limite superiore, o inferiore; purché tutti i suoi punti precedano, o seguano, un medesimo punto di AB. [Si può conceder che la progressione $\{E_n\} = E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ onde si parla sia discendente; perché — detto F quel punto, che per Ipse. segue, o precede, tutti i suoi punti; e posto (qualunque sia l'indice i) $E_i = E_i/F$ — la serie $\{E_n\} = E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ è una progressione in senso contrario alla prima (P 11, 19); e se l'una avrà un punto limite, bisognerà che il simmetrico rispetto ad F sia punto limite dell'altra. Ancora si può conceder che la progressione $\{E_n\}$ giaccia tutta nel raggio AB: se no, basterebbe sostituire ad $\{E_n\}$ la progressione, estendendo discendente, $\{E'_n\}$, che nasce da $\{E_n\}$ in virtù della traslazione di F in A (P 11, 19). — Ora la più modi si può trovar nella classe dei punti medio-simmetrici di A, B verso A una progressione $\{\delta_{u,h}\}$ compenetrante $\{E_n\}$; tale cioè, che fra punti consecutivi d'una qualunque di esse giaccia sempre alcun punto dell'altra; di guisa che il limite inferiore dell'una o dell'altra (ove esista) sia tale necessariamente per tutte e due: ma qui basta naar della regola che assegnammo in P 23; indi invocare sulla progressione normale $\{\delta_{u,h}\}$ il principio XXIV (P 39)]. — Il Lettore può constatar facilmente che — detta η_n l'ascissa del punto E_n rispetto ad (A, B) — le due serie numeriche $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots$ ed $l_0: 2^0, l_1: 2^1, \dots, l_n: 2^n, \dots$ avranno necessariamente uno stesso limite finito, per $n = \infty$; e che pertanto le ascisse dei punti d'una progressione arbitraria come sopra tendono sempre all'ascissa del punto limite. Ecc.

P 41 — Tr. — Qualunque numero reale e finito sarà sempre l'ascissa d'un punto determinato ed unico (della retta AB) rispetto ad A come origine e a B come punto unità. [Invero ciascun numero reale positivo s , tutto che dato ad arbitrio, si può sempre aver come limite, per $n = \infty$, d'una serie di frazioni razionali $s_1: s_1, s_2: s_2, \dots, s_n: s_n, s_{n+1}: s_{n+1}, \dots$, con s_n, s_n interi positivi ed $s_n: s_n$ minore di $s_{n+1}: s_{n+1}$, qualunque sia n . Ora in più modi si può costruire una serie numerica del tipo $l_1: 2^1, l_2: 2^2, \dots, l_n: 2^n, l_{n+1}: 2^{n+1}, \dots$, con l_n, l_n interi positivi ed $l_n: 2^n$ minore di $l_{n+1}: 2^{n+1}$, qualunque sia n , che abbia per $n = \infty$ lo stesso limite e della prima: basterà, come dianzi, che l' n -esimo termine $l_n: 2^n$ della nuova serie sia, tra le frazioni ordinarie irriducibili della forma $l: 2^l$, che hanno valori compresi fra $s_n: s_n$ ed $s_{n+1}: s_{n+1}$, quella che rende minima la somma $i + l$, e minimo il numeratore l . D'altra parte sappiamo, che i numeri $l_1: 2^1, l_2: 2^2, \dots, l_n: 2^n$

... sono precisamente le ascisse dei punti $\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \dots, \delta_{n,n}, \dots$ (P 27); i quali però si offriranno ordinati, sul raggio AB, secondo una progressione discendente rispetto al senso $A \rightarrow B$ (P 25), e tenderanno ad un limite (P 30) il quale avrà per ascissa il dato numero c (P 27). Che poi quest'ascissa non spetti a nessun altro punto di AB, si è già detto in P 28]. — Data ad arbitrio la progressione numerica crescente o decrescente $c_1: y_1, c_2: y_2, \dots, c_n: y_n, \dots$ — le c e y essendo numeri interi positivi — un'altra serie numerica del tipo $\{l_n: 2^{l_n}\}$, che per $n = \infty$ ha sempre lo stesso limite di quella, sarebbe ad esempio $l_1: 2^1, l_2: 2^2, l_3: 2^3, \dots, l_n: 2^n, l_{n+1}: 2^{n+1}, \dots$; dove l_n sia il numero intero (positivo o nullo) determinato univocamente dalle condizioni $l_n: 2^n \leq c_n: y_n < (l_n + 1): 2^n$, vale a dire il massimo intero contenuto nel razionale $(c_n: y_n)2^n$. Se non che la serie dei punti $\delta_{1,1}, \delta_{2,1}, \dots, \delta_{n,1}, \dots$ a cui si perviene con questa legge più semplice, non è sempre una progressione giusta P 19.

APPENDICE

Nota 1^a. *Defaire*, in senso lato, vuol dire circoscrivere e determinare un concetto per via di proposizioni o giudizi (Definizione 'reale' od 'implicita'); ma la *defaisance* propriamente detta — definizione 'nominali' od 'esplicita' — non è altro per noi che "imposizione di nome a un gruppo qualsivoglia di parole o di segni" i. o., se si vuole, un'abbreviazione di linguaggio (parlate e scritte) capace di rispecchiare ed indurre una qualche *condensazione d'idea*. Data una frase, un'espressione o locuzione qualsiasi $F(a, b, \dots; p, q, \dots)$, composta di termini o segni parte logici (*), per es. a, b, \dots e parte *geometrici*, come p, q, \dots ; spongo ci converrà di adottare un solo termine o segno g , e una frase più semplice e più maneggevole G , per indicare e rappresentar nel discorso quel gruppo di segni e ciò ch'esso dinota ed esprime: al che nulla si oppone, sempre che g e G siano termini o frasi attualmente sprovviste di contenuto geometrico. Una tal convenzione si stabilisce o si conferma scrivendo ad es.:

$$g \equiv F(a, b, \dots; p, q, \dots), \text{ ovvero } G \equiv F(a, b, \dots; p, q, \dots);$$

dove il segno ' \equiv ' è da leggersi 'significa', oppure "è *nomale* per definizione a"; e questa identità convenzionale è ciò che si chiama *defaz*, o *esplicita* o *nomale* del termine g o della frase G . L'espressione $F(a, b, \dots; p, q, \dots)$ sarà il *defaisante*, g o G il *defaite*. Carattere essenziale della *defaz* è la facoltà di poter sostituire a piacere il *defaisante* al *defaite*, e viceversa: e per ciò (dal punto di vista formale) non importa nemmeno che sia esattamente conosciuto il valore dei termini geometrici p, q, \dots ma basta che il simbolo g o G scelto a rappresentar $F(a, b, \dots; p, q, \dots)$ sia vergine di significato geometrico; ossia non esprima geometricamente qualcosa anche fuori della *defaz*. in parola (*).

Il più delle volte la *defaz* è retta da un'ipotesi; cioè lo sta innanzi un cappello, dove si pongono alcune condizioni o restrizioni circa i concetti significati da $a, b, \dots; p, q, \dots$. Quest'ipotesi, è allora parte integrale della *defaz*, e non dovrà mai separarsene; posto che la rappresentabilità di F per mezzo di g o G s'intenderà stabilita e concessa in quei soli casi, che l'ipotesi stessa contempla e prevede.

Forse l'ufficio della *defaz*, intesa come abbiamo detto, parrà troppo modesto: epper non è cosa da poco, se si riflette che la nostra ragione sarebbe addirittura impotente ad abbracciare, distinguere, ravvicinare, connettere, insomma a significar col discorso la idea più complicate ed astratte, senza il beneficio di poterle fissare ed evocare *ad libitum* per mezzo di semplici parole o di frasi molto coscine,

(*) Termini logici saranno quelli che possono dirsi comuni a quasi tutte le scienze; e perciò formano come lo scheletro di qualsivoglia ragionamento, esprimendo idee per le più necessarie e pressenti a ogni sorta di operazioni intellettuali. Tali ad es. le formule 'esiste', 'è un', 'non è', 'è contemporaneo di', 'corrisponde a', etc. Il senso loro dev'esser noto a chiunque ragiona; e conviene esser tutti d'accordo circa il valore da attribuire a quelle parole. Il discorso perderebbe ogni efficacia, o sarebbe addirittura impossibile, se fosse in noi menomata o distrutta la facoltà di liberamente appellarci a costanti nozioni (*constant logicks*), il cui studio appartiene alla Logica.

(2) Così p. es. il bambino, che ancor non intende tutto il valore dei termini 'marito' e 'moglie', può facilmente imparare a servirsi utilmente della *defaz*.: « Cognato » \equiv « Fratello del marito » della moglie, o marito d'una sorella ».

anzi che attraverso il giro di lunghe perifrasi. Considerate ad es. quali e quanti fatti geometrici, quante relazioni e proposizioni son contemplate implicitamente e, per così dire, condensate, nella sola nozione di 'figure coesistenti'.

Nova 2ª. Molto giova all'intelligenza dei fatti geometrici l'aver sempre innanzi un'immagine e rappresentazione intuitiva del 'punto' e della 'sfera d'un punto interno ad un altro'; ossia l'abito di contemplare il sonno reale e concreto, che l'uso assueto ai giudizi come "A, B, C sono punti, e C dista da A quanto B". Se è vero che « nichil est in intellectu, quod non fuerit in sensu » (Aristotele) e che « ogni umana sapere ha principio dall'intelligenza » (Kant) non sarà mai superfluo appellarsi anche ai mezzi più grossolani ed empirici per suscitare e verificare nei giovani ogni sorta di cognizioni intuitive e sperimentali sui vari oggetti geometrici. Si può avere un'immagine del punto considerando ad esempio un granellino di polvere, il fore prodotto dalla punta di un ago in un foglio di carta, ecc.: la sfera si può concepir come superficie d'un corpo rotondo, quale ad es. una palla, un arancio, un globo artificiale. Se un'asta rigida è fissata da un'estremità — sia per es. A — ma può girare intorno ad A come perno, le posizioni dell'altro estremo B porgono immagine dei vari punti che 'distano da A quanto B'. Così un filo teso tra due punti A e B, uno dei quali sia fisso, potrà servire a darci un'idea così della sfera B, come del segmento [AB]; ecc. E la più parte dei nostri assiomi si presterebbe assai bene a verifiche sperimentali; da istituir p. es. sopra sistemi articolati di semplicissima struttura; e col sussidio di fili opportunamente saldati dall'un dei capi alla trama d'un telaio rigido; ecc.

Ma la Geometria, come scienza formale, potrebbe anche reggersi ed essere intesa, pur senza mai fare appello al contenuto intuitivo o fisico dei suoi concetti primitivi (il 'punto' e la 'sfera') perchè una mente educata alle idee generali e sorretta da una discreta facoltà di astrazione, divien capace di percepire, oltre il senso logico astratto, anche il senso delle varie proposizioni e le loro voci deduttive, la concatenazione delle parti e i loro rapporti col tutto, ecc., ed che intenda alle proprietà cardinali, che i vari assiomi e postulati della Geometria conferiscono a quelle azioni primitive; e si richiami costantemente alle difin. dei vari oggetti onde si parla. Quel che importa, sopra ogni cosa è la pratica del ragionare con coerenza; vale a dire la cognizione sicura dei rapporti logici di principio a conseguenza: insomma l'arte o la facoltà di retamente argomentare e concludere: facoltà che la Geometria contribuisce, del resto, a sviluppare e promuovere.

Nova 3ª. Allorchando si ammette alle idee primitive un contenuto fisico, gli 'assiomi' o 'proposizioni primitive' sono affermazioni gratuite, giuditij più o meno evidenti, che non si dimostrano, ma con l'aiuto dei quali si riesce a provar tutto il resto per via di ragionamenti inoppugnabili. Conviene accettarli senza discussione, contentandosi d'una cortesia intuitiva o sperimentale; visto che non si può dimostrare ogni cosa. Dal punto di vista formale (e si chiamano allora 'postulati') appartengono invece quali "condizioni, e premesse, da cui dipende la validità o consistenza di tutto il sistema" — cioè di tutte le conclusioni a cui si perviene. In ogni modo si aggirano sempre intorno ai concetti primitivi (sia pure indirettamente, voglio dire attraverso una serie di definiz.): e la verità loro, quando sia conosciuta od ammessa, è garanzia sufficiente per la verità delle altre proposiz. — cioè di tutte le 'proposiz. derivate' o 'teoremi'. Ma (come abbiamo detto) si può anche fare astrazione dalla verità o falsità di queste premesse; ritenendole in guisa di condizioni (né vere, né false) che nei loro insieme costituiscono "una d'fuz. implicita delle nozioni primitive": senza che renga meno perciò la stabilità e l'armonia di tutto quanto il sistema come edificio logico. (Ved. Nota 2ª). La prima volta il Maestro col parli ai discepoli: « Concedetemi la verità di codeste proposiz. primitive; ed io vi condurrò man mano, per « via di successive deduzioni, a dover riconoscere la verità di tutte le altre proposiz. geometriche. » Gli assiomi non sono come il seme di tutte le verità geometriche: ma i germi di queste non si « svolgono da quelli, se non sean fecondati dal razionale. A questo modo s'istituisce, p. es., la Geom. » e l'Arithmetica; in ciò consiste sommariamente il processo deduttivo, che informa tutta questa « la Matematica pura ».

Il dire, che una certa proposiz. P "è conseguenza" di altre proposiz. A, B, ... — o che "dalle A, B, ... si deduce la P" — significa appunto che un essere dotato di ragione, il quale ammetta

per vero le A, B, \dots non può disconoscere la verità di P : insomma, che non ci è consentito affermare le A, B, \dots e negare ad un tempo la P . — Osservate che le A, B, \dots potranno esser conseguenza di altre proposizioni A', B', \dots ; e questa a lor volta di altre A'', B'', \dots (per la qual cosa anche P sarà deducibile dalle A'', B'', \dots) e così via: ma ben s'intende come non ci sia dato il prolungar senza fine quest'ordine di successive riduzioni (e di qui nasce l'impossibilità di provare ogni cosa). Potrà nondimeno accadere che, proseguendo in quella maniera, si giunga ad un piccol numero di proposizioni a, b, \dots assai maneggevoli e credibili (vuolte dire evidenti a chiunque consideri il senso fisico e concreto delle relazioni e figure onde si parla) e dalle quali si possa inferir non soltanto la proposizione P , ma sì ancora tutto l'insieme dei fatti, che importa stabilire in Geometria. Allora ci converrà di accettare queste a, b, \dots in qualità di principi, che non giova discutere: e avremo ottenuto un sistema di assiomi e postulati capaci di reggere, deduttivamente parlando, l'intero edificio geometrico. Pur vi sarà in ogni modo una certa arbitrarietà e libertà nella scelta di quei principi: onde una stessa proposizione che una geometria accolse come postulata, qualcun'altra potrà dimostrarla con la scelta di nuovi principi: ecc. Ma, se ciascuna postulata deve apparir come fatto « evidente per sé medesimo » a chiunque consideri il senso concreto e positivo del termine geometrico (onde il nome di assioma), non così nel riguardi della Geometria quale scienza astratta e formale: dove gli stessi principi ben si potranno e dovranno essere soltanto per condizioni e preesistenze, che s'impongono agli enti non definiti (come sarebbero il « punto » e la « sfera ») acchè di restringer man mano l'arbitrarietà che li circonda e determinarne in qualche modo il concetto. Onde ciascun postulato suggella un nuovo carattere impresso nelle nozioni primitive (di punto e sfera): e così dall'insieme dei postulati risulteranno poi definite implicitamente queste nozioni (Ved. Nota 1^a). Dal primo punto di vista, i principi I, II e III (§ 1) potranno senz'alcun dubbio affermarsi superflui (in quanto dichiarano verità troppo ovvie): non così dal secondo. E invece, chi non abbia riguardo al concetto valor delle frasi « C dista da A quanto B », non ha motivo di ritenere senz'altro, che B dista da A quanto C ; cioè che una relazione fra punti, non ancor definita, ma già designata a quel modo, necessariamente interceda fra i punti B, A, C : e molto meno ch'essa sia convergente e transitiva rispetto a B e C (').

Le proposizioni primitive e medesime caso per caso li deciderà, se due detti oggetti appartengono, e non appartengono, alle categorie « punto » e « sfera »: e tanto basta perchè i « concetti generali » di punto e sfera si possano dire uguali e determinati. Ma un'analisi un po' più minuta ed intrinseca (ella quale non è opportuno d'insistere) permetterebbe altrui di enunciare una vera e propria definizione nominale di quei concetti generali, assegnando di ciascuno le qualità caratteristiche. A una definizione — che riuscirebbe senza alcun dubbio assai macchinosa e prolissa — suppliscono in parte i postulati geometrici: merco dai quali il Lettore, anche senza appellarsi alle sue conoscenze intuitive, viene acquistando per gradi, e riesce a formarsi man mano l'esatta nozione di quel che possono significare ed esprimere il punto e la sfera. I concetti derivati (come di « retta », « piano », « segmento », ecc.) risulteranno poi non determinati nelle stesse miscele dei primitivi, attraverso lo schema delle definizioni nominali (Nota 1^a). Ecc. ecc.

Nota 4^a. Di due figure F, F' , li direi che l'una, p. es. F , « si rappresenta univocamente sull'altra » o « si trasforma univocamente nell'altra » per significare qualitativamente « a ciascun punto di F è subordinato un certo punto di F' ed uno solo » in virtù di qualche relazione esistente fra l'una e l'altra figura. I termini « rappresentazione », « trasformazione » non si definiscono (?): ma si sa che ciascuno cingeva i seni di due figure (trasfor-

(') Non tutte le relazioni son riflessive, convergenti e transitive: p. es. la relazione di parentela « Tizio è figlio di Caio » non può aver luogo, se Tizio e Caio sono la stessa persona; nè può stare insieme con la conversa « Caio è figlio di Tizio »; nè per esser Tizio figlio di Caio, o Sempronio figlio di Tizio, accadrà che Sempronio sia figlio di Caio: ecc., ecc.

(2) I concetti (aritmetici e geometrici) di « trasform. », « funzione », « corrispondenza » e simili — che appena si distinguono fra loro, e risulteranno in quello più generale di « relazione » — spettano di pien diritto alla Logica: e tutto ciò che diremo in questa rubrica vale ciondiando nell'algebra, che F, F' denotino classi o aggregati di qualsivoglia natura, dove per « punto » si legga « individuo » e per « coincide » « eguaglianza », ecc. Ved. p. es. G. PRATO, *Formulario matematico*, ed. V, pag. 73 (Torino, 1906).

massime 'di F in F' , rappresentazione 'di F sopra F' ', ecc.) ed inoltra che l'una, F' , sia immagine dell'altra; cioè la rispecchi secondo una legge qualsiasi, per modo che ciascun punto di F richiami o determini un certo punto di F' ed uno solo. Si aggiunga — come nell'idea general di 'fascione' — che da uno stesso punto di F , o da più punti eguali fra loro in F , la nostra mente sia sempre portata sopra un solo punto di F' , o sopra punti eziandio coincidenti fra loro (unipocità); ma la scambievolanza, o *reciprocità*, delle due figure non è presupposta. Le due figure F ed F' possono confondersi in una; cioè si danno trasformazioni o rappresentazioni 'd'una figura in sé stessa': per esempio si l'una che l'altra potranno anch'esser tutt'uno con la 'classe dei punti' o 'spazio' (P § 11); onde si avranno trasformazioni 'dei punti in punti', o rappresentazioni 'dello spazio in sé medesimo'; ecc. Qualunque volta \mathfrak{N} denoti una rappresentazione univoca di F in F' , ed A un punto arbitrario di F , l'immagine o trasformazione di A secondo \mathfrak{N} (o 'per mezzo di \mathfrak{N} ') s'indica con ' $\mathfrak{N}A$ '.

Non è detto che 'punti distinti' della figura F si specchino in 'punti distinti'; nè che ciascun punto della figura F' sia sempre immagine di qualche punto di F : ma se la prima di queste condizioni sarà soddisfatta, la trasformazione è da chiamare *isomorfa*; e, se si avverano entrambe, sarà da chiamar *converrica*, o *reciproca*. Dunque 'isomorfa' ogni trasformazione o rappresentazione di F in F' , per cui succede, che nessun punto della F' è subordinato a più punti diversi in F ; 'reciproca' ogni trasformazione isomorfa di F in F' , se ciascun punto della F' determina un punto della F , di cui sia l'immagine. Pertanto se è data una trasformazione *reciproca* di F in F' — e sia per es. δ — sarà in pari tempo assegnata una trasformazione, essendo converrica o reciproca, di F' in F , in virtù della quale a ciascun punto A' della figura F' è subordinato quel punto A di F , che δ converte in A' : punto determinato ed unico, in quanto δ è *isomorfa* per definizione. Questa ancora trasformazione, associata alla δ o da δ individuata, prende il nome tras-

formazione *inversa* di δ , e s'indica con δ^{-1} . — Allorquando una figura F si specchia in un'altra F' per mezzo d'una trasformazione reciproca δ — e p. con. F' si rappresenta univocamente

sopra F per mezzo della trasformazione inversa δ^{-1} — si vuol dire che tra le figure F, F' intercede "una corrispondenza perfetta, univoca e reciproca, mulvona in sè e in sé e biunivoca, ecc."; o che le due figure son "riferite fra loro, punto per punto" (v. STAUDT). — 'Trasformazione identica' (d'una figura in sé stessa) è quella rappresentazione per cui ciascun punto coincide con la propria immagine: una trasformazione di fatto è certamente reciproca, e vuole indicarsi con I ; se si estende a tutto lo spazio, prende anche nome d' 'identità', senz'altro.

Due trasformazioni $\mathfrak{S}, \mathfrak{Q}$ d'una medesima figura F in un'altra (o la in sé stessa) dicemmo 'eguali fra loro' — e si scrive $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}$ — se, qualunque sia il punto A di F , sempre $\mathfrak{S}A = \mathfrak{Q}A$: vale a dir se le immagini d'uno stesso punto di F (qual ch'esso sia) per mezzo dell'una o dell'altra sempre coincidono fra loro. Ad es. qualunque trasformazione reciproca è sempre la inversa della propria inversa; e qualunque trasformazione identica è uguale alla propria inversa. Ecc. — Qualivoglia trasformazione \mathfrak{N} (di F in F') si può altresì concepire come operazione sui punti (della figura F) in quanto per mezzo di \mathfrak{N} si passa univocamente dagli F alle loro immagini: se con che lo più volte non ha importanza di sorta il processo, con che si attiene ad es. $\mathfrak{N}A$ da A , ma si dee guardar soltanto al soggetto dell'operazione ed al risentiti. Pare anzi questa la via più accessibile ai giovani (per acquistar le nozioni di cui parliamo): i quali, come già esperti nella operazioni aritmetiche, onde si passa univocamente dai numeri di certe classi ad altri numeri (l'elevazione a quadrato, la divisione per due, ecc.) poco sforzo avranno da metter nell'immaginare un'operazione (geometrica) eseguibile in ciascun punto d'una figura assegnata (ed anche in qualsiasi punto) e che ogni volta dia un punto per risultato (*).

(*) Di sì fatto modo d'intendere (comunissima appo i matematici) si hanno frequenti e opportune sanzioni nel nostro linguaggio, come ad es. nel termini *arrangiare, specchiando, traslatore, ecc.*: i quali richiamano distintamente l'idea di 'operazione geometrica', e non di meno si usano pur con vantaggio nel senso di relazione (cioè di simmetria, equipollenza, ecc.).

Se, essendo F, F', F'' tre date figure, \mathcal{F} sia trasformazione di F in F' , e \mathcal{Q} di F' in F'' , allora si chiama "prodotto di \mathcal{F} per \mathcal{Q} ", o "risultante delle \mathcal{F}, \mathcal{Q} " (nell'ordine in cui sono scritte) la trasformazione di F in F'' , che a ciascun punto A di F dà per immagine il punto $\mathcal{Q}(\mathcal{F}A)$: insomma l'operazione composta, che nasce eseguendo successivamente le operazioni \mathcal{F} e \mathcal{Q} (la seconda su quel che risulta dalla prima). La nuova trasformazione qui definita si indicherà con " $\mathcal{Q}\mathcal{F}$ " (onde $\mathcal{Q}\mathcal{F}A \equiv \mathcal{Q}(\mathcal{F}A)$, qualunque sia A); ma si leggerà procedendo da destra sinistra. E, se $F = F'$, il prodotto di \mathcal{F} per sè stessa — o "quadrato di \mathcal{F} " — s'indicherà con " \mathcal{F}^2 "; ecc., ecc. Il prodotto di una trasformazione reciproca per la propria inversa è una trasformazione identica: $\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} = 1$. Allo stesso modo si definisce ordinatamente il prodotto di tre, quattro, o più rappresentazioni: in cui si riscontra immediatamente la proprietà associativa, ma non ha luogo, generalmente parlando, la proprietà commutativa. Permutabili l'una con l'altra due trasformazioni (di una data figura in sè stessa) allorchando il prodotto è commutativo, cioè non dipende dall'ordine dei due fattori. *Involutorie* qualunque trasformazione reciproca (d'una figura in sè stessa), che si confonda con la propria inversa; ed è quanto dire che il suo quadrato equivale all'identità. Etc. Etc. — Infine, rispetto a qualunque trasformazione \mathcal{N} d'una figura in un'altra (o in sè stessa), dicasi "punto unito, o *tautologo*" qualunque punto, che per avventura sia convertito in sè stesso da \mathcal{N} .